

Skrivtid: 8–13. Tillåtna hjälpmedel: Manuella skrivdon, miniräknare och utlånad formelsamling (lämnas tillbaka tillsammans med skrivningen). Maximal poäng på varje problem är 5. För att erhålla denna krävs att lösningarna är försedda med relevanta motiveringar. För betyg G krävs minst 18 poäng, för betyg VG krävs minst 28 poäng (bonuspoäng inräknat).

LYCKA TILL (och kom ihåg inrederivatan)

1. Använd matrismetoden (Gausselimination) för att avgöra antalet lösningar, för alla värden på konstanterna a och b , till ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + ay = 3 \\ 2x + 3y = b \end{cases}$$

2. Bestäm: a) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, c) $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,
d) För vilka x gäller att $\cos(\arccos x) = x$?
e) För vilka x gäller att $\arccos(\cos x) = x$?

3. Ekvationen $3x^3 + x^2 - 6x - 2 = 0$ har en rationell rot. Lös ekvationen fullständigt.

4. Bestäm: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2-x} - e^2}{x}$, b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2-x} - e^2}{x}$, c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2-x} - e^2}{x}$.

5. a) Verifiera att $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$,

b) Beräkna $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$,

c) Bestäm $\int_0^\infty \frac{1}{4+x^2} dx$.

6. Om man kastar ett föremål rakt uppåt med hastigheten 20 m/sek , så når det en höjd av $h(t) = 20t - 4.9t^2$ (m) efter t sekunder. Vilken är den högsta höjd föremålet når?

7. a) Bestäm konstanterna A och B s.a. $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$,

- b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen:

$$\frac{dx}{dt} = x(x-1) \quad \text{för } x > 1.$$

- c) Lös begynnelseproblemmet
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1) \\ x(0) = 2 \end{cases}.$$

8. Bestäm längden av funktionskurva $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ för $-1 \leq x \leq 1$.

Ledning: Använd formeln $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Svar till tentamen i Matematik och statistik NV1. 2004-03-12

1. Om $a \neq \frac{3}{2}$ har systemet en enda lösning $x = \frac{9-ab}{3-2a}$ och $y = \frac{b-6}{3-2a}$.
För $a = \frac{3}{2}$ och $b = 6$ har systemet oändligt många lösningar $x = 3 - at$ och $y = t$, $t \in \mathbf{R}$,
Om $a = \frac{3}{2}$ och $b \neq 6$ saknar systemet lösningarna.
2. a) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$, c) $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$,
d) $\cos(\arccos x) = x$ för alla $-1 \leq x \leq 1$,
e) $\arccos(\cos x) = x$ för alla $0 \leq x \leq \pi$.
3. $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \sqrt{2}$ och $x_3 = -\sqrt{2}$.
4. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2-x} - e^2}{x} = -e^2$, b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2-x} - e^2}{x} = e(1-e)$, c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2-x} - e^2}{x} = 0$.
5. a) $\left(\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
b) $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = 2 - 5e^{-1} \approx 0.160$
c) $\int_0^\infty \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.
6. Högsta höjden uppnår föremålet efter $\frac{100}{49} \approx 2.04 \text{ sek}$ och når då höjden $h = \frac{1000}{49} \approx 20.4 \text{ m}$.
7. a) $A = -1$, $B = 1$.
b) $x(t) = \frac{1}{1 - Ce^t}$, där $C > 0$.
c) $x(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^t} = \frac{2}{2 - e^t}$.
8. $l = e - e^{-1} \approx 2.35$ l.e.

Lösning till problem 1.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 3 \\ 2 & 3 & b \end{array} \right) r_2 - 2r_1 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 3 \\ 0 & 3-2a & b-6 \end{array} \right)$. Om $a \neq \frac{3}{2}$ multiplicera andra raden med $\frac{1}{3-2a}$. Man får: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & \frac{b-6}{3-2a} \end{array} \right) r_1 - ar_2 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{9-ab}{3-2a} \\ 0 & 1 & \frac{b-6}{3-2a} \end{array} \right)$.

Om $a \neq \frac{3}{2}$ har systemet en enda lösning $x = \frac{9-ab}{3-2a}$ och $y = \frac{b-6}{3-2a}$.

För $a = \frac{3}{2}$ och $b = 6$ har systemet oändligt många lösningar $x = 3 - at$ och $y = t$, $t \in \mathbf{R}$,
Om $a = \frac{3}{2}$ och $b \neq 6$ saknar systemet lösningar.

Lösning till problem 2.

a) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$,

b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$,

c) $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$,

d) $\cos(\arccos x) = x$ för alla $x \in D_{\arccos x} = [-1, 1]$.

e) $\arccos(\cos x) = x$ för alla $x \in [0, \pi]$, ty funktionen $\arccos y$ har värdemängden $[0, \pi]$.

Lösning till problem 3.

$$3x^3 + x^2 - 6x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(3x+1) - 2(3x+1) = 0 \Leftrightarrow (3x+1)(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow 3x+1=0 \text{ eller } x^2-2=0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{3} \text{ eller } x^2=2, \text{ dvs. då } x_2 = \sqrt{2} \text{ eller } x_3 = -\sqrt{2}.$$

Lösning till problem 4.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2-x} - e^2}{x} = \{ \text{använd l'Hospitals regel} \} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{2-x}}{1} = -e^2$ eller
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2-x} - e^2}{x} = -e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = -e^2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = -e^2 \cdot 1 = -e^2$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2-x} - e^2}{x} = \frac{e^{2-1} - e^2}{1} = e - e^2 = e(1 - e)$.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2-x} - e^2}{x} = e^2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} - 1}{x} = e^2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x})}{x} = e^2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x} \right) = 0 - 0 = 0$.

Lösning till problem 5.

a) $\left(\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C \right)' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x \right)$
 $= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$\begin{aligned}
\text{b) } \int_0^1 x^2 e^{-x} dx &= \{ \text{partialintegration} \} = \left[x^2(-e^{-x}) \right]_0^1 - \int_0^1 2x(-e^{-x}) dx = -e^{-1} + 2 \int_0^1 x e^{-x} dx \\
&= -e^{-1} + 2 \left[-x e^{-x} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 1 \cdot (-e^{-x}) dx = -e^{-1} - 2e^{-1} + 2 \int_0^1 e^{-x} dx \\
&= -3e^{-1} - 2 \left[-e^{-x} \right]_0^1 = 2 - 5e^{-1} \approx 0.160 \\
\text{c) } \int_0^\infty \frac{1}{4+x^2} dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{4} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2} dx = \frac{1}{4} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[2 \arctan \frac{x}{2} \right]_0^T \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Lösning till problem 6.

Först bestämmer vi stationära punkter till funktionen $h(t) = 20t - 4.9t^2$.

$h'(t) = 20 - 9.8t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{4.9} = \frac{100}{49} \approx 2.04$. I punkten $t = \frac{100}{49}$ antar funktionen $h(t)$ sitt maximum: $h(\frac{100}{49}) = \frac{1000}{49} \approx 20.4 \text{ m}$.

Lösning till problem 7.

$$\begin{aligned}
\text{a) } \frac{1}{x(x-1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x - A}{x(x-1)} \Leftrightarrow A+B=0 \text{ och } A=-1, \\
&\text{alltså om } B=1 \text{ och } A=-1. \\
&\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}. \\
\text{b) } \frac{dx}{dt} &= x(x-1) \Leftrightarrow \frac{1}{x(x-1)} \cdot \frac{dx}{dt} = 1 \Leftrightarrow \int \frac{1}{x(x-1)} dx = \int dt \\
&\Leftrightarrow \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x} dx = \int 1 dt \Leftrightarrow \ln(x-1) - \ln x = t + C_1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = t + C_1 \\
&\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = Ce^t \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 - Ce^t \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{1 - Ce^t}. \\
\text{c) } \text{Begynnelseproblemmet löses då konstanten } C &\text{ väljs så att } 2 = \frac{1}{1 - Ce^0} = \frac{1}{1 - C} \\
&\Leftrightarrow C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^t} = \frac{2}{2 - e^t}.
\end{aligned}$$

Lösning till problem 8.

Om $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ så gäller att $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

$$\begin{aligned}
1 + (f'(x))^2 &= 1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \\
&= \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)^2, \text{ alltså } \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}). \\
l &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (e^x + e^{-x}) dx = \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}]_{-1}^1 = e - e^{-1} \approx 2.35.
\end{aligned}$$