UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Pepe Winkler
tel. 018-471 32 89 .

Prov i matematik
Ingång 2
Matematik och statistik NV1.
2004-06-10

Skrivtid: 8 – 13. Tillåtna hjälpmedel: Manuella skrivdon, miniräknare och utlånad formelsamling (**lämnas tillbaka** *tillsammans med skrivningen). Maximal poäng på varje problem är 5. För att erhålla denna krävs att lösningarna är försedda med relevanta motiveringar. För betyg* **G** *krävs minst 18 poäng, för betyg* **VG** *krävs minst 28 poäng (bonuspoäng inräknat).*

LYCKA TILL *(och kom ihåg* **inrederivatan***)*

1. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Bestäm A^{-1}.

b) För vilken matris X gäller att $A \cdot X = B$?

2. Ekvationen $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x = 2$ har en rot $x_1 = i$.
Verifiera detta och bestäm alla, övriga rötter till ekvationen.

3. För vilka värden på konstanterna a och b har funktionen

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + x + 1}{2x^2 - x - 1}$$

en vågrät asymptot $y = 3$?
Använd sedan dessa värden på a och b och bestäm funktionens lodräta asymptoter.
Bestäm även funktionens stationära punkter och dessas karaktär.

4. Visa att funktionerna $f(x) = \arctan(x-1)$ och $g(x) = \arctan\dfrac{x-2}{x}$ skiljes med en konstant. Bestäm konstanten för alla $x > 0$.

5. Bestäm:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx$ **Ledning:** $\displaystyle\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{x-1+1}{(x-1)^2}$.

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x}{(x-1)^2+1}\,dx$

6. Grafen till ekvationen $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ bildar en sluten kurva som kallas en ellips. I ellipsen skrivs in en likbent triangel vars spets ligger i origo och de två övriga hörnen på ellipsen. Bestäm största möjliga arean för en sådan triangel.

7. Låt A vara det område som begränsas av kurvan $y = xe^x$, $x-$axeln samt linjerna $x = 0$ och $x = 2$.

a) Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då A roteras ett varv kring $x-$ axeln.

b) Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då A roteras ett varv kring $y-$ axeln.

8. Betrakta differentialekvationen $(x+1) \cdot y' = y^2 + 1$, för $x > -1$.

a) Bestäm den allmänna lösningen.

b) Bestäm den lösning för vilken $y(0) = 1$.

Svar till tentamen i Matematik och statistik NV1. 2004-06-10

1. a) $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. b) $x_1 = i$, $x_2 = -i$, $x_3 = \sqrt{3} - 1$ och $x_4 = -\sqrt{3} - 1$.

3. $a = 0$ och $b = 6$. Funktionen $f(x) = \dfrac{6x^2 + x + 1}{2x^2 - x - 1}$ har två lodräta asymptoter $x = -\dfrac{1}{2}$ och $x = 1$. Funktionen har två stationära punkter $x = -2$ (lokalt minimum) och $x = 0$ (lokalt maximum).

4. $\arctan(x - 1) = \arctan \dfrac{x-2}{x} + \dfrac{\pi}{4}$.

5. a) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx = \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$. b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx = \frac{3}{4}\pi$.

c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(x-1)^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

6. Största arean är $A = 1$ a.e.

7. a) $V_x = \dfrac{\pi}{4}(5e^4 - 1)$ v.e. b) $V_y = 4\pi(e^2 - 1)$ v.e.

8. a) $y(x) = \tan(\ln(x+1) + C)$, b) $y(x) = \tan(\ln(x+1) + \frac{\pi}{4})$.

Lösningar till tentamen i Matematik och statistik NV1. 2004-06-10

Lösning till problem 1.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ -1 & 3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ r_2 + r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 4 & | & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 - \frac{1}{4}r_2 \\ \frac{1}{4}r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$

Alltså, $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

b) $A \cdot X = B \Leftrightarrow A^{-1}\dot{A} \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B\,.$

$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Lösning till problem 2.

$i^4 + 2i^3 - i^2 + 2i - 2 = 1 - 2i - (-1) + 2i - 2 = 0$. Alla koefficienter i den algebraiska ekvationen är reella och därför tillsammans med $x_1 = i$ är även $x_2 = \overline{x_1} = -i$ en rot.
Enligt faktorsatsen är polynomet $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x - 2$ delbart med $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$. $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2x - 2)$. Övriga rötter är lösningar till ekvationen $x^2 + 2x - 2 = 0$, alltså $x_3 = -1 + \sqrt{3}$ och $x_4 = -1 - \sqrt{3}$.

Lösning till problem 3.

För att $f(x)$ ska ha en vågrät asymptot måste gradtalet för täljaren vara lika med gradtalet för nämnaren, alltså $a = 0$.
Om $a = 0$ gäller att $f(x) = \dfrac{bx^2 + x + 1}{2x^2 - x - 1}$ och $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{bx^2 + x + 1}{2x^2 - x - 1} = \dfrac{b}{2} = 3 \Leftrightarrow b = 6$.
Lodräta asymptoter har funktionen där $2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ och $x = 1$.

$$f'(x) = \frac{(12x + 1)(2x^2 - x - 1) - (4x - 1)(6x^2 + x + 1)}{(2x^2 - x - 1)^2} = -\frac{8x(x + 2)}{(2x^2 - x - 1)^2}.$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = -2$.
I $x = 0$ derivatan ändrar tecknet från $+$ till $-$. Detta innebär att i $x = 0$ har funktionen lokalt maximum ($f(0) = -1$).
I $x = -2$ derivatan ändrar tecknet från $-$ till $+$. Detta innebär att i $x = -2$ har funktionen lokalt minimum ($f(-2) = \dfrac{23}{9}$).

Lösning till problem 4.

Derivatan $f'(x) = \dfrac{1}{1 + (x - 1)^2} = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

Derivatan $g'(x) = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{x-2}{x}\right)^2} \cdot \dfrac{1 \cdot x - (x - 2) \cdot 1}{x^2} = \dfrac{2}{x^2 + (x - 2)^2} = \dfrac{2}{2x^2 - 4x + 4} = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

Derivatorna $f'(x)$ och $g'(x)$ är lika, så funktionerna skiljes bara med en konstant.
$\arctan(x - 1) = \arctan \dfrac{x - 2}{x} + C$. För att bestämma konstanten C sätt in $x = 1$.
Man får $\arctan 0 = \arctan(-1) + C \Leftrightarrow 0 = -\dfrac{\pi}{4} + C \Leftrightarrow C = \dfrac{\pi}{4}$.

Lösning till problem 5.

a) $\displaystyle\int \frac{x}{(x - 1)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}\right) dx = \ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + C.$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_0^{T} \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx = [\arctan(x-1)]_0^T$

$\displaystyle = \lim_{T\to\infty} \arctan(T-1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi\,.$

c) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x}{(x-1)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2} \frac{2(x-1)+2}{(x-1)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2} \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1}\,dx + \int_0^{2} \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\Big[\ln\Big((x-1)^2+1\Big) + \arctan(x-1)\Big]_0^2 = \frac{1}{2}\ln 2 + \arctan 1 - \Big(\frac{1}{2}\ln 2 - \arctan(-1)\Big) = \frac{\pi}{2}\,.$

Lösning till problem 6.

Beteckningarna enligt figuren nedan. Låt $A(x)$ beteckna arean av den heldragna (eller sträckdragna) triangenl. Obs: båda trianglarna har samma area.

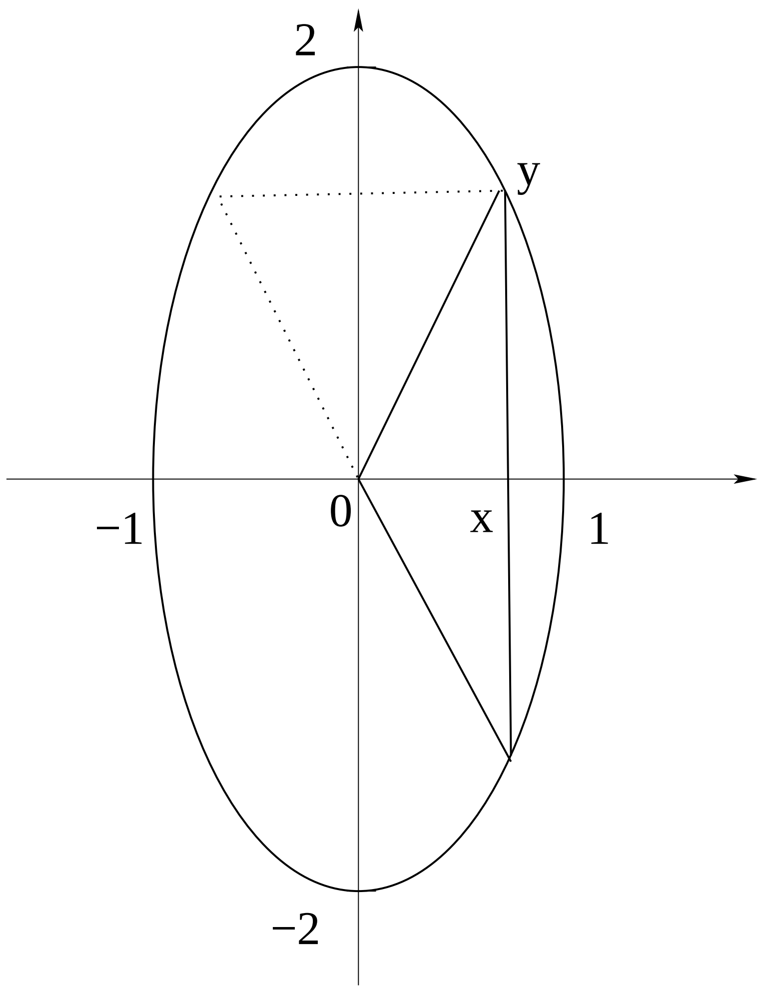
$$A(x) = x\cdot y = x\cdot\sqrt{4-4x^2} = 2x\sqrt{1-x^2}\,,\ \text{där } 0\le x\le 1\,.$$

Funktionen $A(x)$ antar sitt största värde antingen för $x=0$ eller i en stationär punkt, dvs i en punkt där $A'(x)=0$.

$A'(x) = 2\left(\sqrt{1-x^2} + x\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) = \dfrac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$, alltså $A'(x)=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$A(0)=A(1)=0$ (minsta värdet) och $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1\,.$

Största arean är alltså lika med 1 a.e.



Lösning till problem 7.

a) $V_x = \pi \int\limits_0^2 (xe^x)^2\,dx = \pi \int\limits_0^2 x^2 e^{2x}\,dx = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} x^2 - \int x e^{2x}\,dx \right]_0^2$

$= \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} x^2 - \left(\frac{e^{2x}}{2} x - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx \right) \right]_0^2 = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) \right]_0^2 = \frac{\pi}{4}(5e^4 - 1)\,.$

b) $V_y = 2\pi \int\limits_0^2 x \cdot xe^x\,dx = 2\pi \int\limits_0^2 x^2 e^x\,dx = 2\pi \left[x^2 e^x - 2 \int x e^x\,dx \right]_0^2$

$= 2\pi \left[x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x \right]_0^2 = 4\pi(e^2 - 1)\,.$

Lösning till problem 8.

a) $(x+1) \cdot y' = y^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2+1} \cdot y' = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \int \frac{1}{x+1}\,dx$

$\Leftrightarrow \arctan y = \ln(x+1) + C \Leftrightarrow y = \tan(\ln(x+1) + C)\,.$

b) $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = \tan(\ln 1 + C) = \tan C \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{4}\,.$

Den sökta lösningen är $y(x) = \tan(\ln(x+1) + \frac{\pi}{4})\,.$