

*Skrivtid: 8 – 13. Tillåtna hjälpmedel: Manuella skrivdon, miniräknare och utlånad formelsamling (lämnas tillbaka tillsammans med skrivningen). Maximal poäng på varje problem är 5. För att erhålla denna krävs att lösningarna är försedda med relevanta motiveringar. För betyg G krävs minst 18 poäng, för betyg VG krävs minst 28 poäng (bonuspoäng inräknat).*

**LYCKA TILL (och kom ihåg inrederivatan)**

1. Bestäm följande gränsvärden:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x^3 + 1}{x \ln x + x},$       b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\ln x}.$

2. En rätvinklig triangel med given hypotenusan  $a$  roterar kring en av kateterna så att en kon uppstår.

Bestäm den triangel som ger konen med största volymen.

3. Funktionen  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$  är given.

Rita grafen till funktionen med angivande av eventuella lodräta och vågräta asymptoter och lokala extrempunkter. Bestäm ekvationen för tangenten i punkten  $(2, 7)$  till grafen.

Vilket är största och minsta värde för funktionen i intervallet  $[-2, 0]$ ?

4. Beräkna integralerna:

a)  $\int (x^2 + 1) \ln x \, dx,$       b)  $\int_{-1}^1 \frac{x}{1 + x^4} \, dx,$       c)  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1 + x^2)}.$

5. Bestäm den volym som uppstår då området som innesluts mellan  $y = 4 - x^2$  och  $y = 2 + x$  roterar kring  $x$ -axeln.

6. Är det sant att  $\int \frac{1}{1 + x^2} \, dx = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} + C$  för  $x > 0$ ? Motivera ordentligt ditt svar.

7. Bestäm den lösning till differentialekvationen  $y' = e^{2x-y}$ , som går genom punkten  $(0, 0)$ , dvs. lös begynnelsevärdesproblem

$$\begin{cases} y' &= e^{2x-y} \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

8. Området som begränsas av grafer till  $y = \frac{x^2}{2}$  och  $y = \sqrt{2x}$  roterar runt  $x$ -axeln. Bestäm volymen av den uppkomna kroppen.

**Ledning:** Tänk på skivformeln  $V = \pi \int_a^b y^2 \, dx.$

1. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x^3 + 1}{x \ln x + x} = 3$ , b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\ln x} = 1$ .

2. Triangelns kateter ska ha mått  $\frac{a}{\sqrt{3}}$  och  $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ . Konens volym är  $V_{max} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}a^3$ .

3.  $x = 1$  är en lodrät asymptot,  $y = x + 1$  är en sned asymptot. Funktionen har lokalt maximum i  $(-1, -2)$  och lokalt minimum i  $(3, 6)$ . Tangenten i punkten  $(2, 7)$  har ekvationen  $3x + y = 13$ .  $-2$  är det största och  $-3$  det minsta värden för funktionen i intervallet  $[-2, 0]$ .

4. a)  $\int (x^2 + 1) \ln x \, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \ln x - \frac{x^3}{9} - x + C$ , b)  $\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^4} \, dx = 0$ ,  
c)  $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = 1 - \frac{\pi}{4}$ .

5.  $V = \pi \int_{-2}^1 ((4-x^2)^2 - (2+x)^2) \, dx = \frac{108}{5}\pi$  v.e.

6. Ja, det är sant ty  $\frac{d}{dx} \left( \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C \right) = \frac{1}{1+x^2}$ .

7.  $y(x) = \ln(e^{2x} + 1) - \ln 2$ .

8.  $V = \frac{12}{5}\pi$  v.e.

**Lösning till problem 1.**

- a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x^3 + 1}{x \ln x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x \ln x + 1}{x \ln x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x (3 + \frac{1}{x \ln x})}{x \ln x (1 + \frac{1}{\ln x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x \ln x}}{1 + \frac{1}{\ln x}} = 3,$   
 ty  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} = 0,$   
 b) Sätt  $x - 1 = t$ .  $x \rightarrow 1 \Leftrightarrow t \rightarrow 0$  och  $x = 1 + t$ .  
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\ln x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{t}{\ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1 \cdot 1 = 1.$

**Lösning till problem 2.**

Beteckna en av kateterna i triangeln med  $x$ . Enligt Pythagoras sats, andra kateten har måt  $\sqrt{a^2 - x^2}$ , Roter triangeln kring den andra kateten. Då uppstår en kon med volymen

$$V(x) = \frac{\pi}{3}(a^2 - x^2)x = \frac{\pi}{3}(a^2x - x^3).$$

Funktionen  $V(x)$  är kontinuerlig och definierad för  $0 \leq x \leq a$ , alltså  $V(x)$  antar sitt största och minsta värdet antingen i ändpunkterna för intervallet eller i en stationär punkt.

$V(0) = V(a) = 0$ , alltså största värde antas då  $V'(x) = 0$ .  $V'(x) = \frac{\pi}{3}(a^2 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}$

ty  $x > 0$ . Detta  $a$ -värde ger största volymen  $V_{max} = V(\frac{a}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}a^3$  v.e.

**Lösning till problem 3.**

Definitionsmängden för funktionen är  $D_f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 1\}$ . Linjen  $x = 1$  är en lodrät asymptot ty  $\lim_{x \rightarrow 1 \pm} f(x) = \pm \infty$ . Genom polynomdivision ser man att  $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-1}$ .

Detta visar att linjen  $y = x + 1$  är en sned asymptot då  $x \rightarrow \pm \infty$ .

$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$ . Ett teckenstudium för derivate visar att funktionen har ett lokalt maximum i  $(-1, -2)$  och ett lokalt minimum i  $(3, 6)$ .

$f'(2) = \frac{3 \cdot (-1)}{1} = -3$ . Ekvationen för tangenten i  $(2, 7)$  blir således

$$y - 7 = -3x(x - 2) \Leftrightarrow 3x + y = 13.$$

För att bestämma största och minsta värde i  $[-2, 0]$  noterar vi att vi har en stationär punkt i  $x = -1$  med  $f(-1) = -2$ . I ändpunkterna för intervallet har vi  $f(-2) = -\frac{7}{3}$  och  $f(0) = -3$ . Största värde i  $[-2, 0]$  är  $-2$  (antas för  $x = -1$ ) och minsta värdet är  $-3$  (antas då  $x = 0$ ).

**Lösning till problem 4.**

a)  $\int (x^2+1) \ln x \, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \cdot \frac{1}{x} \, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} + 1\right) \, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \ln x - \frac{x^3}{9} - x + C,$

b)  $\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^4} \, dx = 0$ , ty funktionen  $f(x)$  är en udda funktion ( $f(-x) = -f(x)$ ), alltså integralen över ett symmetriskt intervall är 0.

Det går bra att räkna. Sätt  $t = x^2$ ,  $dt = 2x \, dx$  och man får:

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^4} \, dx = \frac{1}{2} \int_1^1 \frac{1}{1+t^2} \, dt = 0,$$

$$\text{c) } \int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_1^X \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \lim_{G \rightarrow \infty} \int_1^G \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \lim_{G \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} - \arctan x \right]_1^G = 0 - \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

**Lösning till problem 5.**

$$V = \pi \int_{-2}^1 ((4-x^2)^2 - (2+x)^2) dx = \pi \int_{-2}^1 (x^4 - 9x^2 - 4x + 12) dx = \left[ \frac{x^5}{5} - 3x^3 - 2x^2 + 12x \right]_{-2}^1 = \frac{1}{5} - 3 - 2 + 12 - \left( -\frac{32}{5} + 24 - 8 - 24 \right) = \frac{33}{5} + 15 = \frac{108}{5} \pi \text{ v.e.}$$

**Lösning till problem 6.**

$$\begin{aligned} \text{Likheten gäller om och endast om } \frac{d}{dx} \left( \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C \right) &= \frac{1}{1+x^2}. \\ \frac{d}{dx} \left( \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C \right) &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2}} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \left( -\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \right) \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

**Lösning till problem 7.**

Ekvationen kan skrivas om som  $e^y \cdot y' = e^{2x}$ . Ekvationen är, alltså separabel. Integrationen ger  $e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + C \Leftrightarrow y(x) = \ln\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right)$  som är allmän lösning till ekvationen. Insättningen av begynnelsevillkoret ger  $0 = \ln\left(\frac{1}{2} + C\right) \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$ , alltså den sökta lösningen är  $y(x) = \ln\left(\frac{1}{2}(e^{2x} + 1)\right) = \ln(e^{2x} + 1) - \ln 2$ .

**Lösning till problem 8.**

Graferna till funktionerna skär varandra om  $\sqrt{2x} = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x_1 = 0$  eller  $x_2 = 2$ . Alltså området som roterar runt  $x$ -axeln kan beskrivas som  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \frac{x^2}{2} \leq y \leq \sqrt{2x}\}$ .

$$\begin{aligned} \text{Den sökta volymen är } V &= \pi \int_0^2 (\sqrt{2x})^2 dx - \pi \int_0^2 \left( \frac{x^2}{2} \right)^2 dx = \pi \int_0^2 \left( 2x - \frac{x^4}{4} \right) dx = \\ \pi \left[ x^2 - \frac{x^5}{20} \right]_0^2 &= \pi \left( 4 - \frac{32}{20} \right) = \frac{12}{5} \pi \text{ v.e.} \end{aligned}$$