

Skrivtid: 8 – 13. Tillåtna hjälpmedel: Manuella skrivdon, miniräknare och utlånad formelsamling (lämnas tillbaka tillsammans med skrivningen). Maximal poäng på varje problem är 5. För att erhålla denna krävs att lösningarna är försedda med relevanta motiveringar. För betyg G krävs minst 18 poäng, för betyg VG krävs minst 28 poäng.

LYCKA TILL (och kom ihåg inrederivatan)

1. För vilka värden på x gäller att

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) ?$$

Ledning: Använd formel A 9 från formelsamlingen.

2. Beräkna: a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1}$, b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^3}{2x^3 + 3x^2 - 4}$.

3. a) Beräkna derivatan för funktionen $f(x) = x2^x$.
b) Funktionen $y(x)$ satisfierar ekvationen $xy^2 - x^2y = 2$ i en omgivning av punkten $(1, 2)$.
Bestäm $y'(1)$.

Ledning: Använd implicit derivering.

4. Bestäm: a) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$, b) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx$.

5. I punkten $P = (p, 1 - p^2)$, där $0 < p < 1$, dras en tangentlinje till kurvan $y = 1 - x^2$.
Tangentlinjen avgränsar tillsammans med koordinataxlarna en triangel.
Bestäm triangelns minsta möjliga area.

Ledning: Skriv upp tangentlinjens ekvation i punkten $(p, 1 - p^2)$.

6. Visa att $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \arctan \sqrt{x^2 - 1} + C$.

7. Skissera grafen till funktionen $f(x) = \frac{(x - 3)^2}{x^2 - 1}$ med angivande av eventuella lodräta och vågräta asymptoter samt max- och minipunkter.

8. Bestäm en integrerande faktor till differentialekvationen $xy' + 2y = 1$.
Lös sedan begynnelsevärdesproblem:

$$\begin{cases} xy' + 2y = 1 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

1. $x = -\frac{\pi}{12} + n\pi$, för alla $n \in \mathbf{Z}$.
2. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = -\pi$,
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x^3}{2x^3+3x^2-4} = -\frac{1}{2}$.
3. a) $f'(x) = 2^x(1+x \ln x)$,
b) $y'(1) = 0$.
4. a) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = -2 \cos \sqrt{x} + C$,
b) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx = 1$.
5. Triangelns area är minst då $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$ och $A_{min} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.
6. Visa att $\frac{d}{dx}(\arctan \sqrt{x^2-1} + C) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.
7. $x = 1$ och $x = -1$ är två lodräta asymptoter, $y = 1$ är en vågrät asymptot. I punkten $(\frac{1}{3}, -8)$ funktionen har en maximipunkt och i punkten $(3, 0)$ funktionen har en minimipunkt.
8. $\mu(x) = x$ är en integrerande faktor för ekvationen.
 $y(x) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x^2})$ är en lösning till begynnelsevärdesproblemet.

Lösning till problem 1.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right) \Leftrightarrow \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \\ \frac{\pi}{4} - x &= \frac{\pi}{3} + n\pi \text{ för } n \in \mathbf{Z}. \text{ Alltså } x = -\frac{\pi}{12} + n\pi, \text{ för } n \in \mathbf{Z}.\end{aligned}$$

Lösning till problem 2.

a) Sätt $x - 1 = t$. Då gäller att $t \rightarrow 0$ om och endast om $x \rightarrow 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(t + 1))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin(\pi t)}{\pi t} \cdot \pi = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \pi t}{\pi t} \pi = -1 \cdot \pi = -\pi.$$

Ovan har vi använt att $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ och av faktum att om $t \rightarrow 0$

då även $\pi t \rightarrow 0$.

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - x^3}{2x^3 + 3x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(\frac{2}{x^3} - 1)}{x^3(2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x^3} - 1}{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3}} = -\frac{1}{2}.$$

Lösning till problem 3.

a) Logaritmera funktionen $f(x)$. $\ln f(x) = \ln(x2^x) = \ln x + \ln 2^x = \ln x + x \ln 2$. Derivera:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} + \ln 2, \text{ alltså } f'(x) = f(x)\left(\frac{1}{x} + \ln 2\right) = x2^x\left(\frac{1}{x} + \ln 2\right) = 2^x(1 + x \ln 2).$$

Implicitderivera: $1 \cdot y^2 + x \cdot 2y \cdot y' - 2xy - x^2y' = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{2xy - y^2}{2xy - x^2}$. För $x = 1$ gäller att

$$y = 2, \text{ alltså } y'(1) = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 - 2^2}{2 \cdot 1 \cdot 2 - 1^2} = 0.$$

Lösning till problem 4.

$$\text{a)} \quad \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sätt } t = \sqrt{x} \\ t^2 = x \\ 2t dt = dx \end{array} \right\} = \int \frac{\sin t \cdot 2t}{t} dt = 2 \int \sin t dt = -2 \cos t + C =$$

$$-2 \cos \sqrt{x} + C.$$

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \ln x - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} dx \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^b = \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1 \right) &= 1.\end{aligned}$$

Lösning till problem 5.

Tangentlinjen till kurvan $y = 1 - x^2$ i punkten $(p, 1 - p^2)$ har ekvationen

$y - (1 - p^2) = -2p(x - p)$. Tangentlinjen skär x -axeln då $y = 0$ dvs. i punkten

$x = \frac{1 + p^2}{2p}$ och y -axeln då $x = 0$, dvs. $y = 1 + p^2$.

$$\begin{aligned}\text{Arean av den avgränsade triangeln är } A(p) &= \frac{1}{2} \frac{1 + p^2}{2p} \cdot 1 + p^2 = \frac{1}{4} \frac{(1 + p^2)^2}{p} \Rightarrow A'(p) = \\ \frac{1}{4} \frac{2(1 + p^2) \cdot 2p \cdot p - (1 + p^2)^2}{p^2} &= \frac{1}{4} \frac{1 + p^2}{p^2} (3p^2 - 1).\end{aligned}$$

$A'(p) = 0 \Leftrightarrow 3p^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ty $p > 0$. Triangelns area är minst då $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$ och

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4} \frac{(1 + \frac{1}{3})^2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}. \text{ (Obs: } A(p) \rightarrow +\infty \text{ då } p \rightarrow 0 \text{ och } A(1) = 1 > \frac{4\sqrt{3}}{9}.)$$

Lösning till problem 6.

$$\text{Likheten gäller} \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \right) = \left(\arctan \sqrt{x^2-1} + C \right)'.$$

$$VL = \frac{d}{dx} \left(\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$HL = \left(\arctan \sqrt{x^2-1} + C \right)' = \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2-1})^2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{1 + x^2 - 1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$\text{Alltså } VL = HL, \text{ dvs. likheten } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \arctan \sqrt{x^2-1} + C \text{ gäller.}$$

Lösning till problem 7.

$$y = \frac{(x-3)^2}{x^2-1} = \frac{(x-3)^2}{(x+1)(x-1)}.$$

$$\begin{aligned} 1. \text{ Nollställen : } y = 0 &\Rightarrow x = 3, \\ x = 0 &\Rightarrow y = -9. \end{aligned}$$

2. Stationära punkter :

$$y' = \frac{(x^2-1) \cdot 2(x-3) - 2x(x-3)^2}{(x^2-1)^2} = \frac{2(x-3)(3x-1)}{(x^2-1)^2}$$

$$\text{Alltså } y' = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ eller } x = \frac{1}{3}.$$

3. Asymptoter :

$$\begin{aligned} x \rightarrow -1^- &\Rightarrow y \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -1^+ &\Rightarrow y \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow 1^- &\Rightarrow y \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow 1^+ &\Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Alltså $x = -1$ och $x = 1$ är lodräta asymptoter.

$$y \rightarrow 1^+ \text{ om } x \rightarrow -\infty \text{ och } y \rightarrow 1^- \text{ om } x \rightarrow +\infty,$$

alltså $y = 1$ är vågrät asymptot och grafen närmar sig uppifrån linjen $y = 1$ då $x \rightarrow -\infty$ och nerifrån då $x \rightarrow +\infty$.

Lösning till problem 8.

$$xy' + 2y = 1 \Leftrightarrow y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x}. \text{ En integrerande faktor } \mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = x^2.$$

Alltså en integrerande faktor till ekvationen $xy' + 2y = 1$ kan väljas som $\mu(x) = x$. Om man multiplicerar ekvationen med $\mu(x)$ får man $x^2y' + 2xy = x \Leftrightarrow (x^2y)' = x \Leftrightarrow x^2y = \frac{x^2}{2} + C$. Ur

begynnelsevillkoret att $y(1) = 1$ följer att $1^2 \cdot 1 = \frac{1^2}{2} + C$, alltså att $C = \frac{1}{2}$.

$$\text{Man får } y(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right).$$