

æ

Gå till nästa sidan

Något om lösningar till algebraiska ekvationer

Förstegradsekvation

En algebraisk ekvation av första graden är en ekvation av typen

$$x + a = 0,$$

som har alltid en lösning $x = -a$.

Andragradsekvation

En algebraisk ekvation av andra graden är en ekvation av typen

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Ekvationerna av denna typ kan vi lösa med metoder vi känner från gymnasiekursen i matematik.

I fall a och b är reella tal får vi att

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

I fall a och b är komplexa tal, kan vi inte använda ovanstående formel ty kvadratroten ur ett icke-reellt tal är inte definierad.

Men i detta fall kan vi använda motsvarande metoden som vid härledningen av ovanstående formler.

Tredjegrads ekvation

Mycket besvärligare är att lösa tredjegrads ekvation, dvs. en ekvation av typen

$$(1) \quad x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Här skall vi beskriva hur kan man gå till väga för att erhålla lösningar till en sådan ekvation.

Låt oss nu sätta in $x = z - \frac{1}{3}a$. Vi får då en ekvation där koefficienten framför z^2 är noll, dvs. en ekvation av formen

$$(2) \quad z^3 + pz + q = 0.$$

(Genomför räkningarna.)

Nu skall vi försöka lösa den här ekvationen.

Sätt in $z = u + v$ i (2). Vi får då

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Om vi nu väljer u och v så att $3uv + p = 0$, dvs. $uv = -\frac{p}{3}$ så får vi ekvations-system

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ u^3 v^3 &= -\frac{p^3}{27}, \end{aligned}$$

som genom substitutionen $t = u^3$ och $s = v^3$ leder till systemet

$$\begin{aligned} t + s &= -q \\ ts &= -\frac{p^3}{27}, \end{aligned}$$

som i sin tur leder till den kvadratiske ekvationen

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0,$$

som har lösningar:

$$t_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Vi får att

$$s_{1,2} = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Alltså

$$z = u + v = \left[-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}}.$$

Nu är det lätt att skriva upp lösningarna till ekvationen (1).

Detta överlämnar vi till läsaren. Den beskrivna metoden kallas i litteraturen för ”Cardanos lösning” trots att den förste som löste ekvationen var Seipione del Ferro (omkring 1500) från Bologna.

ÖVNING 1

Lös med den beskrivna metoden ekvationen:

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Fjärdegradsekvation

Lösningar till fjärdegradsekvationen är ännu besvärligare än till tredjegradekvationer. Här nedan beskrivs metoden (efter Cardanos elev och sekreterare Ferrari) med vilken kan man få fram formeln för lösningen av fjärdegradsekvationen. Vi utelämnar en del enkla detaljer.

Låt oss betrakta ekvationen

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Addera till båda sidor $(ex + f)^2$. Vi får:

$$(1) \quad x^4 + ax^3 + (b + e^2)x^2 + (c + 2ef)x + (d + f^2) = (ex + f)^2,$$

e och f väljer vi så att vänstra ledet i (1) blir fullständig kvadrat, dvs. kan skrivas som $(x^2 + px + q)^2$. Kvadrering och jämförelse av koefficienter leder till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2p &= a, \\ p^2 + 2q &= b + e^2, \\ 2pq &= c + 2ef, \\ q^2 &= d + f^2. \end{aligned}$$

Från första ekvationen får vi att $p = \frac{a}{2}$ och omskrivning av de övriga ekvationer ger

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{a^2}{4} + 2q - b, \\ 4e^2 f^2 &= (aq - c)^2, \\ f^2 &= q^2 - d. \end{aligned}$$

Sätt in första och tredje ekvationen i andra och vi får:

$$(aq - c)^2 = (a^2 + 8q - 4b)(q^2 - d).$$

Detta är en tredjegradsekvation i q som kan lösas med ovan beskriven metoden. Alltså q kan uttryckas med hjälp av a, b, c och d .

Sedan ur sambandet $(x^2 + px + q)^2 = (ex + f)^2$ kan vi bestämma e och f .

Vi får $[x^2 + (p + e)x + (q + f)][x^2 + (p - e)x + (q - f)] = 0$, dvs. två andragrads-ekvationer

$$x^2 + (p + e)x + (q + f) = 0,$$

och

$$x^2 + (p - e)x + (q - f) = 0,$$

vars rötter är lösningar till den ursprungliga fjärdegradsekvationen.

Lösningsmetoderna beskrivna ovan är besvärliga men ändå med hjälp av dem kan man få fram rötterna till ekvationerna upp till fjärdegraden.

Så är inte fallet med ekvationerna av högre grad än fyra. Redan Abel (1802–1829) och Galois (1811–1832) visade (oberoende av varandra) att det finns inga allmänna lösningsmetoder för sådana ekvationer, därför skall vi i fortsättning studera en del egenskaper som kan hjälpa till att lösa algebraiska ekvationer.