UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Pepe Winkler

NÅGRA UPPGIFTER
om differentialekvationer

Några uppgifter

1. Man vet att sönderfallshastigheten för ett radioaktivt ämne är proportionell mot den totala mängden av kvarvarande radioaktiva ämnet. Proportionallitetskonstanten är specifikt för varje ämne.
   Antag att vi vet att halveringstiden för ämnet är 10 år. Efter hur lång tid 100 g av ämnet reduceras till 10 g?

2. En infektionssjukdom antas sprida sig i en population med en hastighet som är proportionell mot såvel antalet infekterade som antalet oinfekterade individer. När man upptäckte smittan var en tredje del av populationen redan smittad. Spridningshastigheten var då så stor att om den förblev konstant, skulle hela populationen vara smittad efter 60 dagar. Hur stor del av befolkningen var faktiskt smittad efter 60 dagar?

3. Bästa dryckstemperaturen för konjak är $29°C$ (då den som bekant smakar bäst). Konjaken serveras i rumstemperatur ($21°C$). Hur länge skall man hålla konjakskupan i händerna (kroppstemperaturen är som bekant $37°C$) innan konjaken är som bäst om efter 2 minuter konjakstemperaturen har stigit till $25°C$ och man vet att konjakens temperaturhöjning per tidsenhet är proportionell mot temperaturskillnaden mellan kroppstemperatur och konjakstemperatur ?

4. En tank innehåller 1000 l saltlösning som innehåller 50 kg salt. Man fyller 10 l/min av lösningen som innehåller 10 g/l salt. Samtidigt tappar man av 10 l/min av fullständigt blandat lösningen. Hur mycket salt finns i tanken efter 40 minuter?

Översättningen till "**matematiska**"

1. Låt $y(t)$ beteckna mängden av det radioaktiva ämnet vid tiden t (räknat i år). Låt vidare $-k$ vara den specifika konstanten för ämnet. Vi vill bestäma t så att $y(t) = 10$ då vi vet att:

$$\begin{cases} y'(t) & = -k \cdot y(t) \\ y(0) & = 100 \\ y(10) & = 50\,. \end{cases}$$

2. Låt $y(t)$ vara andelen av populationen som är smittad efter tiden t dygn, räknad från upptäckten. Vi vill bestäma $y(60)$ då vi vet att:

$$\begin{cases} y'(t) & = k \cdot y(t) \cdot (1 - y(t)) \\ y(0) & = \dfrac{1}{3} \\ 60 \cdot y'(0) & = \dfrac{2}{3}\,, \end{cases}$$

där k är proportionallitetskonstant.

3. Låt $T(t)$ vara konjakens temperatur efter t minuter. Vi vill bestäma t så att $T(t) = 29$ då vi vet att:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} & = k(37 - T(t)) \\ T(0) & = 21 \\ T(2) & = 25\,, \end{cases}$$

där k är en konstant.

4. Låt $x(t)$ vara mängden av salt vid tiden t (i minuter). $x(0) = 50$.
In får vi $10 \cdot 10$ g/min $= 10 \cdot \dfrac{10}{1000} = \dfrac{1}{10}$ kg/min.
Vi tappar 10 l/min av fullständigt omrört lösning, dvs $10 \cdot \dfrac{x(t)}{1000}$ kg/min salt. Vi får förändring per minut (hastigheten) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{10} - \dfrac{x}{100} = \dfrac{10-x}{100}$. Vi vill lösa problemet:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = \dfrac{10-x}{100} \\ x(0) & = 50\,. \end{cases}$$