Problem

I en hästjord finns ett antal ungdjur, fertila djur och gamla djur. Vi ska skaffa en hästhjord, där vi vill att alla tre gruppetna ska öka med samma faktor årligen. Hur stor kan förändringsfaktorn vara och hur många ungdjur, fertila djur och gamla djur måste vi införskaffa? Följande årliga förändringar gäller för hjorden:

- Ungdjuren: 60 % är fortfarande ungdjur, 30 % har blivit fertila och resten har avlidit. Antalet nya ungdjur är 50 % av antalet fertila djur vid årets början.
- Fertila djuren: 80 % är fortfarande fertila, 10 % har blivit gamla och resten har avlidit.
- Gamla djuren: 40 % återstår, resten har avlidit.

Lösning

Antag att det i hjorden finns x ungdjur, y fertila djur och z gamla djur.

Om vi låter antalet nya djur i respektive grupp vara U, F och G får vi ekvationssystemet:

$$\begin{cases} U = 0{,}60x + 0{,}50y \\ F = 0{,}30x + 0{,}80y \\ G = 0{,}10y + 0{,}40z \end{cases}$$

Ekvationssystemet blir på matrisform:

$$\begin{bmatrix} 0{,}60 & 0{,}50 & 0 \\ 0{,}30 & 0{,}80 & 0 \\ 0 & 0{,}10 & 0{,}40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ F \\ G \end{bmatrix}$$

Vi vill att alla gruppetna av djur ska öka (eller minska) med samma faktor λ., dvs. $U = \lambda x$, $F = \lambda y$ och $G = \lambda z$ .Vi får då

På matrisform:

$$\begin{bmatrix} 0{,}60-\lambda & 0{,}50 & 0 \\ 0{,}30 & 0{,}80-\lambda & 0 \\ 0 & 0{,}10 & 0{,}40-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Lösningen $\vec{x} = \vec{0}$ duger inte, så vi måste finna andra lösningar. Det innebär att lösningarna kommer att innehålla en parameter och determinanten för koefficientmatrisen måste vara noll.

$$\begin{vmatrix} 0{,}60-\lambda & 0{,}50 & 0 \\ 0{,}30 & 0{,}80-\lambda & 0 \\ 0 & 0{,}10 & 0{,}40-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (0{,}40-\lambda)\begin{vmatrix} 0{,}60-\lambda & 0{,}50 \\ 0{,}30 & 0{,}80-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow (0{,}40-\lambda)(\lambda^2 - 1{,}4\lambda + 0{,}33) = 0$$

Lösningarna, dvs. möjliga förändringsfaktorer är $\lambda_1 = 0{,}40$, $\lambda_2 = 0{,}30$ och $\lambda_3 = 1{,}1$. Eftersom vi vill ha en ökning av hjorden intresserar vi oss endast för $\lambda = 1{,}1$. Nu kan vi beräkna hur många djur vi måste skaffa av varje sort, genom att sätta in $\lambda = 1{,}1$ i ekvationssystemet:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0{,}60-1{,}10 & 0{,}50 & 0 & 0 \\ 0{,}30 & 0{,}80-1{,}10 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}10 & 0{,}40-1{,}10 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -0{,}50 & 0{,}50 & 0 & 0 \\ 0{,}30 & -0{,}30 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}10 & -0{,}7 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Med lösning $z = t$, $y = 7t$ och $x = 7t$

Svar

Hjorden kommer att öka med 10 % årligen om vi införskaffar 7 gånger så många unga och fertila djur som vi skaffar gamla.

Obs

1. De tillåtna förändringsfaktorerna λ är koefficientmatrisens *egenvärden*.
2. Ekvation (2) kallas för koefficientmatrisens *karakteristiska ekvation*
3. Ekvation (1) kan skrivas

$$\begin{bmatrix} 0{,}60-\lambda & 0{,}50 & 0 \\ 0{,}30 & 0{,}80-\lambda & 0 \\ 0 & 0{,}10 & 0{,}40-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}60 & 0{,}50 & 0 \\ 0{,}30 & 0{,}80 & 0 \\ 0 & 0{,}10 & 0{,}40 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$