UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Pepe Winkler

Matematik och statistik
med datoranvändning MN1
ingång 2

En uppgift

Ett obduktionsrum hålls vid konstant temperatur 5° C. En tidig morgon pågår obduktion av ett mordoffer, då en bov bryter sig in, skjuter obducenten och bortför det andra liket. Klockan $10^{\underline{00}}$ anländer en assistent och upptäcker obducentens lik, som då har temperaturen av 23° C. Kl. $12^{\underline{00}}$ har temperaturen gått ned till 18.5° C. När blev obducenten skjuten? (Vi antar att han hade normal kroppstemperatur, 37° C, då han var i livet.)

> Newtons avsvalningslag säger att en kropp med temperaturen T, som placeras i en omgivning som håller temperaturen $T_0 (< T)$, kommer att svalna på så vis att temperaturen minskar med en hastighet som är proportionell mot temperaturdifferansen $T - T_0$.

LÖSNING:

Låt t vara antalet timmar efter kl. $10^{\underline{00}}$. Låt $T(t)$ vara obducentens temperatur efter t timmar. Enligt Newtons lag gäller att $\dfrac{dT}{dt} = k(T - T_0)$, där k är proportionalitets konstant och $T_0 = 5°$ C. Differentialekvationen $\dfrac{dT}{dt} = k(T-5)$ är en separabel ekvation. Vi vill lösa ekvationen med begynnelsevillkoren $T(0) = 23°$ C och $T(2) = 18.5°$ C.

$\dfrac{dT}{dt} = k(T-5) \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{dT}{T-5} = \int k\,dt \Leftrightarrow \ln(T-5) = kt + C \Leftrightarrow$

$T - 5 = Ae^{kt} \Leftrightarrow T(t) = 5 + Ae^{kt}$, där k, C och A är konstanter.

Ur det första begynnelsevillkoret får vi $23 = 5 + Ae^0 \Leftrightarrow A = 18$. Det andra begynnelsevillkoret ger $18.5 = 5 + 18e^{2k} \Leftrightarrow 13.5 = 18e^{2k} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{13.5}{18} = k \Leftrightarrow k \approx -0.144$. Alltså $T(t) = 5 + 18e^{-0.144t}$. Vi söker nu t sådant att $T(t) = 37$, dvs. $37 = 5 + 18e^{-0.144t} \Leftrightarrow$ $t = \dfrac{1}{-0.144}\ln\dfrac{32}{18} =\approx -4$.

SVAR:

Obducenten blev skjuten 4 timmar före kl. $10^{\underline{00}}$, dvs. klockan var $6^{\underline{00}}$ då en bov bröt sig in och skjutit obducenten.

Alt 2. Låt t vara tiden och $T(t)$ obducentens temperatur vid tiden t. P.s.s som tidigare $T(t) = 5 + Ae^{kt}$ med begynnelsevillkoren $T(10) = 23$ och $T(12) = 18.5$.

Vi får: $23 = 5 + Ae^{10k}$ och $18.5 = 5 + e^{12k}$. Detta medför att: $18 = Ae^{10k}$ och $13.5 = Ae^{12k}$. Division av andra ekvationen med första ger $k = \dfrac{1}{2}(\ln 13.5 - \ln 18) \approx -0.144$. Första ekvationen ger då att $A = 18e^{1.44} \approx 76$.

$T(t) = 5 + 76e^{-0.144t}$ och vi söker t s. a. $37 = 5 + 76e^{-0.144t}$, dvs.

$$t = \frac{1}{0.144}(\ln 19 - \ln 8) \approx 6.00\,.$$

SVAR:

Obducenten blev mordad kl. $6^{\underline{00}}$.