UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Pepe Winkler

INTEGRALER AV RATIONELLA FUNKTIONER

A) Täljaren har samma eller högre gradtal än nämnaren

Utför polynomdivision eller andra algebraiska manipulationer för att åstadkomma en kvot (ett **polynom**) plus en **rest** (som går att integrera enligt **B**). Jfr ex 11.8 på sid 302 i kursboken.

B) Täljaren (T) är av lägre grad än nämnaren (N).

* Nämnaren är av första graden:

Ex 1. $\displaystyle\int \frac{a}{1+bx}\,dx = \frac{a\ln|1+bx|}{b} + C\,,$

** **N** är av högre grad än 1;

Frågeställning: **Är T en derivata till N?** Om **Ja**

Ex 2. $\displaystyle\int \frac{12x^3+14x-8}{3x^4+7x^2-8x+12}\,dx = \ln|3x^4+7x^2-8x+12| + C\,,$

Om **Nej**

I. N är av andra graden och N=0 ger komplex lösning

1) Ex 3. $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+6x+10}\,dx$

Sätt **N**=0

$x^2+6x+10=0 \Leftrightarrow x=-3\pm i \Rightarrow$**Reell lösning saknas**.

Kvadratkomplettera

$x^2+6x+10 = x^2+6x+9-9+10 = (x+3)^2+1\,.$

$$\int \frac{5}{x^2+6x+10}\,dx = \int \frac{5}{1+(x+3)^2}\,dx = 5\arctan(x+3) + C\,.$$

2) Ex 4. $\displaystyle\int \frac{2x+10}{x^2+6x+10}\,dx = \int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}\,dx + \int \frac{4}{x^2+6x+10}\,dx = I_1 + I_2 + C$

$I_1 = \ln|x^2+6x+10| = \ln(x^2+6x+10)$ Se Ex 2, och

$I_2 = 4\arctan(x+3)$ Se Ex 3.

$$\int \frac{2x+10}{x^2+6x+10}\,dx = \ln(x^2+6x+10) + 4\arctan(x+3) + C\,.$$

3) Ex 5. $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+6x+13}\,dx$

N=0 ger $x^2+6x+13=0 \Rightarrow x=-3\pm 2i \Rightarrow$ ekvationen saknar reell lösning. Jfr Ex 3. Efter kvadratkomplettering erhålls

$$\int \frac{5}{x^2+6x+13}\,dx = \int \frac{5}{(x+3)^2+4}\,dx = \frac{5}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x+3}{2}\right)^2} =$$
$$\frac{5}{4}\cdot 2\cdot \arctan\left(\frac{x+3}{2}\right) + C = \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x+3}{2}\right) + C\,.$$

II. N är av andra graden och N=0 ger reell lösning

1) Ex 6. $\displaystyle\int \frac{3}{(x-2)^2}\,dx = \begin{bmatrix} u = x-2 \\ \frac{du}{dx} = 1 \\ du = 1\cdot dx \end{bmatrix} = \int \frac{3}{u^2}\,du = \int 3\cdot u^{-2}\,du = -3u^{-1} + C = -\frac{3}{x-2} + C\,.$

Alternativ lösning

$$\int \frac{3}{(x-2)^2}\,dx = \int 3(x-2)^{-2}\,dx = \frac{3(x-2)^{-1}}{-1} + C\,.$$

2) Ex 7. $\displaystyle\int \frac{3x}{(x-2)^2}\,dx = \begin{bmatrix} u = x-2 \\ \frac{du}{dx} = 1 \\ du = 1\cdot dx \\ x = u+2 \end{bmatrix} = \int \frac{3(u+2)}{u^2}\,du = \int \left(\frac{3u}{u^2} + \frac{6}{u^2}\right)du =$

$$\int \left(\frac{3}{u} + 6u^{-2}\right)du = 3\ln|u| - 6u^{-1} + C = 3\ln|x-2| - \frac{6}{x-2} + C\,.$$

3) Ex 8. $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2-1}\,dx$ $\qquad$ **N**$=0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Partialbråksuppdelning

$$\frac{3x+5}{x^2-1} = \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)} =$$
$$\frac{(A+B)x+(B-A)}{(x+1)(x-1)}$$

Bestämning av A **och** B kan ske på olika sätt; t.ex:

* $3x+5 \equiv A(x-1)+B(x+1)$ (Välj lämpliga $x-$värden)
$x = 1 \Rightarrow 8 = 2B \Leftrightarrow B = 4$
$x = -1 \Rightarrow 2 = -2A \Leftrightarrow A = -1$

** $3x+5 = (A+B)x + (B-A)$

Identifiering av koefficienter ger

$\begin{cases} 3 &= A+B \\ 5 &= B-A \end{cases}$ Ekvationssystemet ger $A = -1$ och $B = 4$.

Integralen kan nu skrivas om och lösas:

$$\int \frac{3x+5}{x^2-1}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{4}{x-1}\right)dx = -\ln|x+1| + 4\ln|x-1| + C\,.$$

Jfr ex 11.9 , 11.10 och 11.11 i kursboken.

III. N är av högre gradtal än 2.

Faktoruppdela och partialbråksuppdela.

Ex 9. $\displaystyle\int \frac{3x^2+7x+5}{(x+1)(x^2+2x+2)}\,dx$ $\qquad$ **N**$=0 \Leftrightarrow x=-1\,.$

Partialbråksuppdelning

$$\begin{aligned}\frac{3x^2+7x+5}{(x+1)(x^2+2x+2)} &= \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}\\ &= \frac{A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+2x+2)}\\ &= \frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+2A+C}{(x+1)(x^2+2x+2)}\,.\end{aligned}$$

Identifiering ger $A+B=3\,,\ 2A+B+C=7$ och $2A+C=5\,.$ Systemet har lösningen $A=1\,,\ B=2$ och $C=3\,.$
$\displaystyle\frac{3x^2+7x+5}{(x+1)(x^2+2x+2)}=\frac{1}{x+1}+\frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,.$

Alltså

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+7x+5}{(x+1)(x^2+2x+2)}\,dx &= \int\frac{1}{x+1}\,dx+\int\frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx\\ &= \ln|x+1|+\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx+\int\frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx\\ &= \ln|x+1|+\ln(x^2+2x+2)+\arctan(x+1)+C\,.\end{aligned}$$