

Ett exempel.

Ett företag ska starta ett program för nyrekrytering. Man skall varje år ta in ett antal praktikanter, varav en tredjedel blir anställda efter ett år. Efter ytterligare ett år blir hälften av dessa handledare åt 6 nya praktikanter vardera, för att året därefter sluta sitt arbete inom rekryteringsprogrammet.

Hur många (minst) praktikanter ska man ta in varje år för att programmet skall vara självbärande (dvs. ej behöva sysselsätta folk utifrån, bortsett de två första åren)?

Lösningen:

Låt p , n och h beteckna antalet praktikanter, nyanställda och handledare ett visst år. Låt P , N och H beteckna samma ett år efter. Då får vi att $P = 6h$, $N = \frac{1}{3}p$ och $H = \frac{1}{2}n$. Dessa samband kan beskrivas med hjälp av matriser enligt följande:

$$\begin{pmatrix} P \\ N \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ n \\ h \end{pmatrix}.$$

Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ och $X = \begin{pmatrix} p \\ n \\ h \end{pmatrix}$. Programmet är självbärande om $\begin{pmatrix} P \\ N \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ n \\ h \end{pmatrix}$, dvs om vi kan hitta lösningen till systemet:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ n \\ h \end{pmatrix},$$

som kan skrivas om $AX = X \Leftrightarrow (A - E)X = O$. Detta system har icke-trivial lösning $\Leftrightarrow \det(A - E) = 0$ (så är fallet) och lösningen är

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

varav vi kan avläsa att $X = t \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dvs programmet är självbärande om man har varje år 6 gånger fler praktikanter än handledare och nyanställer dubbelt så många som antalet handledare.