

Läsanvisningar till **Kapitel 8.**

Istället att läsa kap.8 i kursboken kan Du läsa detta.

Maclaurins formel. Formulering:

SATS: Om funktionen $f(x)$ och dess derivator till och med ordning $n + 1$ är kontinuerliga i en omgivning av $x_0 = 0$ då gäller att:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

där $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = x^{n+1}A(x)$, för något c mellan 0 och x och där $A(x)$ är en begränsad funktion i en omgivning av 0.

Beviset ska läsas först efter att man har studerat kapitel 10 i kursboken.

Om Du vill kan Du fortsätta på nästa sidan direkt.

BEVIS: (intressant men inte nödvändigt). Ur integralkalkylens huvudsats följer att:

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt, \text{ dvs. } f(x) = f(0) + \int_0^x 1 \cdot f'(t) dt.$$

Vi partialintegrerar nu sista integralen där som primitiv funktion till 1 väljer vi $(t - x)$ (obs: t är integrationsvariabel och x är konstant i detta sammanhang). Vi får:

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= [(t - x)f'(t)]_{t=0}^x - \int_0^x (t - x)f''(t) dt \\ &= f'(0)x - \int_0^x (t - x)f''(t) dt. \end{aligned}$$

Nu upprepar vi partialintegrationen och vi får:

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) - f'(0)x &= \left[\frac{1}{2}(t - x)^2 f''(t) \right]_{t=0}^x + \int_0^x \frac{1}{2}(t - x)^2 f'''(t) dt \\ &= \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{1}{2} \int_0^x (t - x)^2 f'''(t) dt. \end{aligned}$$

Upprepad partialintegration efter samma mönster ger:

$$f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2}x^2 - \frac{f'''(0)}{3!}x^3 - \dots - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = R_{n+1}(x),$$

$$\text{där } R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x (t - x)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Man kan visa att $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = x^{n+1}A(x)$, där $A(x)$ är en begränsad funktion i en omgivning till 0.

Taylor's formel

Om vi vill approximera funktionen $f(x)$ i en omgivning av en punkt $x = a$ sätter vi $g(t) = f(t+a)$ och använder Maclaurins formel på g . Vi får

$$\begin{aligned} g(t) = f(t+a) &= g(0) + \frac{g'(0)}{1!}t + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^n + R_{n+1}(t) \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}t + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}t^n + R_{n+1}(t) \end{aligned}$$

Med $t = x - a$ kan detta skrivas som

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x-a),$$

där $R_{n+1}(x-a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, där c ligger i en omgivning av a .

Entydighet av Maclaurinutvecklingar

SATS Om funktionen $f(x)$ och dess derivator till och med ordning $n+1$ är kontinuerliga och om

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^{n+1}B(x),$$

där $B(x)$ är en begränsad funktion i en omgivning av 0 då denna utveckling är Maclaurinutveckling, dvs. $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ för $k = 1, \dots, n$.

Om Maclaurinutvecklingar

I kursboken använder man Maclaurinutvecklingar så gott som till approximativa beräkningar av funktionsvärden. Maclaurinutvecklingar är också ett viktigt hjälpmedel vid gränsberäkningar. Några andra tillämpningar redovisas nedan.

Extremundersökningar

Om $f'(a) = 0$ kan funktionen f ha lokalt extremvärde i a . För det fall att teckenundersökning av f' är svår att göra och att även $f''(a) = 0$ är Maclaurinutveckling till hjälp.

EXEMPEL 1 Undersök om $f(x) = e^{-x^2} + x \sin x$ har extremvärde för $x = 0$.

LÖSNING: $f'(x) = -2xe^{x^2} + \sin x + x \cos x$, och $f'(0) = 0$, dvs. 0 är en stationär punkt. Maclaurinutveckling ger:

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + x^6 A(x) + x \left(x - \frac{x^3}{3!} + x^5 B(x) \right),$$

där $A(x)$ och $B(x)$ är begränsade i en omgivning av 0. Alltså är:

$$f(x) = 1 + \frac{x^4}{3} + x^6 (A(x) + B(x)) = 1 + x^4 \left(\frac{1}{3} + x^2 A(x) + x^2 B(x) \right).$$

Eftersom den sista parantesen går mot $\frac{1}{3}$ då $x \rightarrow 0$, är den större än 0 i en omgivning av $x = 0$. Eftersom dessutom $x^4 > 0$ för $x \neq 0$ finner vi att $f(x) > 1$ för alla $x \neq 0$ i en omgivning av $x = 0$. Alltså har f ett strängt lokalt minimum ($= 1$) för $x = 0$.

□

ÖVNING

Undersök om

a) $f(x) = \tan x - \arctan x$,

b) $g(x) = e^{\frac{x^2}{2}} + \cos x$

har lokalt extremvärde för $x = 0$.

Svar: a) Ej extremvärde, b) lokalt minimum.

Asymptoter till kurvor

En linje $y = kx + m$ är asymptot till kurvan $y = f(x)$, om

$$f(x) = kx + m + r(x)$$

där $r(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow \infty$ (eller $x \rightarrow -\infty$).

EXEMPEL 2 Bestäm eventuella asymptoter till kurvan $y = \sqrt{1+x^2}$.

LÖSNING: Det finns inga lodräta asymptoter, eftersom $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ är kontinuerlig för alla x ; för $x > 0$ är

$$f(x) = x\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = x\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{A(x)}{x^4}\right) = x + \frac{1}{2x} + \frac{A(x)}{x^3},$$

där $A(x)$ är begränsat för t.ex. $\frac{1}{x^2} \leq 1$, dvs. för $x \geq 1$. Eftersom

$$r(x) = \frac{1}{2x} + \frac{A(x)}{x^3} \rightarrow 0, \quad \text{då } x \rightarrow \infty,$$

följer att $y = x$ är asymptot. Även läget i förhållandet till asymptoten får man besked om: eftersom $r(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2} + \frac{A(x)}{x^2}\right) > 0$ för alla tillräckligt stora x (parantesen går ju mot $\frac{1}{2}$ då $x \rightarrow \infty$), ligger

för dessa x kurvan ovanför asymptoten. (Man ser förstås direkt att $f(x) = \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = x$ för alla $x > 0$.)

Eftersom f är en jämn funktion följer att också $y = -x$ är asymptot

”då $x \rightarrow -\infty$ ”.

Svar: $y = x$ och $y = -x$ är asymptoter.

□

ÖVNING

Bestäm eventuella asymptoter till kurvorna

a) $y = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

b) $y = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$.

Svar: a) $x = -1$ och $y = x - \frac{1}{2}$, b) $y = x + \frac{1}{3}$.

Uppgifter att räkna:

Testproblemen till kap. 8

ÖVNINGAR: 8.4 b, c, 8.5 a, d, 8.9, 8.10.

Den här sidan kan du hoppa över.

Approximation av integraler (Läses efter kapitel 10, hoppa över vid första genomläsning.)

EXEMPEL 3 Bestäm ett närmevärde för $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4}$.

LÖSNING: Det går att bestäma en primitiv funktion, men det är något omständigt. Av

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{1-t}$$

följer

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4} &= \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^4 + x^8) dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{12}}{1+x^4} dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9 - R \end{aligned}$$

där

$$0 < R < \int_0^{\frac{1}{2}} x^{12} dx = \frac{1}{13} \left(\frac{1}{2}\right)^{13} < 0.00001,$$

vilket ger

$$0.493957 < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4} < 0.493967.$$

□

ÖVNING

Bestäm ett närmevärde för

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx$$

genom att ta med tre termer och restterm i Maclaurinutvecklingen av integranden.

Svar: Värdet ligger mellan 0.46125 och 0.46146.

Intressant men ej viktigt: **e är ett irrationellt tal – bevis**

Nu skall vi visa att talet e är irrationellt.

Antag att e är ett rationellt tal, dvs. att $e = \frac{a}{b}$ där a och b är heltal.

Enligt Maclaurins formel är

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad \text{där } 0 < \theta < 1.$$

Låt $n \geq b$. Då får vi

$$n! \frac{a}{b} - n! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = \frac{e^\theta}{(n+1)}.$$

Vänstra ledet här ovan är ett heltal, däremot inte högra ledet (om $n \geq 2$),

$$\text{ty } 0 < \frac{e^\theta}{(n+1)} < \frac{3}{n+1}.$$

Denna orimlighet visar att antagandet att e är ett rationellt tal är falskt.

e är ett irrationellt tal.

□