

En uppgift.

Bestäm talet a så att kurvan $y = a^x$ tangerar linjen $y = x$.

Lösning:

Antag att $y = x$ tangerar kurvan $y = a^x$ i punkten $x = t$. Då gäller för t att tangenten har ekvationen $y - a^t = a^t \ln a (x - t)$. Tangenten går genom origo och därför får vi sambandet $-a^t = -ta^t \ln a \Leftrightarrow t = \frac{1}{\ln a}$. I punkten $x = \frac{1}{\ln a}$ tangentens riktningskoefficient är 1, alltså $a^{\frac{1}{\ln a}} \ln a = 1 \Leftrightarrow a^{\frac{1}{\ln a}} = \frac{1}{\ln a}$. Logaritmerig av båda sidor ger $\frac{1}{\ln a} \cdot \ln a = \ln \frac{1}{\ln a} = -\ln \ln a \Leftrightarrow -1 = \ln \ln a \Leftrightarrow e^{-1} = \ln a \Leftrightarrow a = e^{e^{-1}} = e^{\frac{1}{e}}$.

SVAR: Linjen $y = x$ tangerar kurvan $y = \left(e^{\frac{1}{e}}\right)^x$ i punkten $x = e$. □