

Skriptid: 8-13. Tillåtna hjälpmedel: skrivdon. Poäng: varje uppgift ger maximalt 5 poäng. För betyget tre fordras minst 18 poäng, för betyget fyra minst 25 poäng och för betyget fem minst 32 poäng. Endast välskrivna och tydliga lösningar accepteras för rättning.

1. För vilka reella tal x gäller nedanstående olikhet?

$$|x - 1| + |x - 2| \leq 1$$

2. Lös ekvationen

$$\frac{\log_3(x + 2)}{\log_3 x} = 2$$

3. Visa med induktion att

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

4. a) Uttryck det komplexa talet $\sqrt{3} + i$ i polär form.
b) Lös den binomiska ekvationen $z^5 = \sqrt{3} + i$ och markera rötterna i det komplexa talplanet.

5. Lös ekvationen

$$\cos(2x) - \cos(x) + \sin^2(x) + \frac{1}{4} = 0.$$

6. a) Visa att ekvationerna

$$2x^2 - 12x + y^2 - 2y + 15 = 0 \quad \text{och} \quad 2x^2 - 4x + y^2 - 2y - 1 = 0$$

beskriver två ellipser. Skissa dem i ett koordinatsystem.

- b) Bestäm ellipsernas skärningspunkter om det finns några.

7. a) 18 punkter är markerade på en cirkel. Hur många trianglar kan man rita som har sina hörn bland dessa punkter?
b) 9 punkter är markerade på var och en av två parallella linjer. Hur många trianglar kan man rita som har sina hörn bland dessa punkter?
(Ledtråd: Resonera kombinatoriskt.)

8. a) Bestäm de reella konstanterna a och b så att polynomet

$$p(z) = z^4 - 2z^3 + az^2 + bz - 2$$

har de två nollställena $z = 1$ och $z = -1$.

- b) Bestäm polynomets övriga nollställen.

LYCKA TILL!