

Lösningar till duggan 26 september 2009

Baskursen i matematik

$$1) -1 \leq \frac{x-1}{x+2} < 1$$

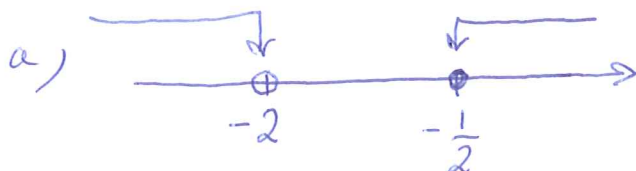
$$a) -1 \leq \frac{x-1}{x+2}$$

$$0 \leq \frac{x-1}{x+2} + 1$$

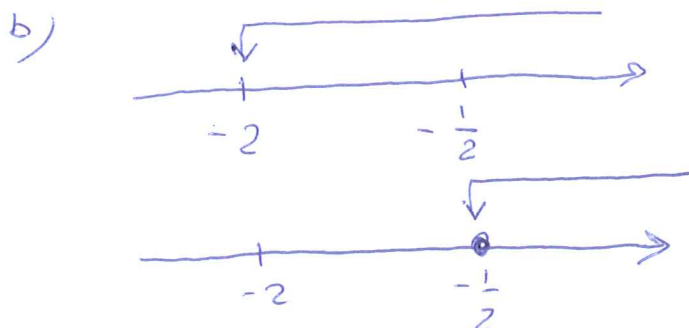
$$0 \leq \frac{2x+1}{x+2}$$

x	-2	$-\frac{1}{2}$	
$2x+1$	-	-	0 +
$x+2$	-	0 +	+
$\frac{2x+1}{x+2}$	+ ej def	-	0 +
	↑	↑	↑

$$x < -2 \text{ eller } x \geq -\frac{1}{2}$$



och



$$b) \frac{x-1}{x+2} < 1$$

$$\frac{x-1}{x+2} - 1 < 0$$

$$\frac{-3}{x+2} < 0$$

Eftersom täljaren är negativ och uttrycket (knoten) är negativ måste

$$x+2 > 0$$

$$x > -2$$

$$\text{Svar: } x \geq -\frac{1}{2}$$

2: Påst. $\sum_{k=1}^n 2^k = 2^{n+1} - 2 \quad (P_n)$

Bevis: Steg 1: Testa om P_1 är sann

($n=1$) V.L. $\sum_{k=1}^1 2^k = 2^1 = 2$

H.L. $2^{1+1} - 2 = 4 - 2 = 2$

$\therefore V.L. = H.L. \quad \therefore P_1$ är sann

Steg 2: Testa: Om P_p sann så P_{p+1} sann

($n=p$) $\sum_{k=1}^p 2^k = 2^{p+1} - 2$ antar vi är sann.

($n=p+1$) V.L. $\sum_{k=1}^{p+1} 2^k = \sum_{k=1}^p 2^k + 2^{p+1} = 2^{p+1} - 2 + 2^{p+1} =$
 $= 2 \cdot 2^{p+1} - 2 = 2^{p+2} - 2$

H.L. $= 2^{p+1+1} - 2 = 2^{p+2} - 2$

$\therefore H.L. = V.L. \quad \therefore$ Gäller att om P_p är sann så är P_{p+1} sann.

Steg 3: Enligt induktionsaxiomet gäller då att P_n är sann.

V.S.B

$$3) \left(\frac{2}{x^4} - x^8 \right)^{40} = \sum_{k=0}^{40} \binom{40}{k} \left(\frac{2}{x^4} \right)^k \cdot (-x^8)^{40-k}$$

↑
binomialsatsen

Bestäm eventuellt k för x^{176} -termen

$$\begin{aligned} & \binom{40}{k} \cdot (2 \cdot x^{-4})^k \cdot (-1)^{40-k} \cdot x^{8(40-k)} = \\ & = \underbrace{\binom{40}{k} \cdot 2^k \cdot (-1)^{40-k}}_{\text{koefficient}} \cdot \underbrace{x^{-4k} \cdot x^{8(40-k)}}_{= x^{176}} \end{aligned}$$

$$-4k + 8(40 - k) = 176$$

$$-12k = -144$$

$$k = 12$$

∴ det finns en x^{176} -term då $k = 12$

$k = 12$ insättes i koefficienten

$$\binom{40}{12} \cdot 2^{12} \cdot (-1)^{28} = \underline{\underline{\binom{40}{12} \cdot 2^{12}}}$$

Svar: x^{176} -termen är

$$\binom{40}{12} \cdot 2^{12} x^{176}$$

4) Ekvationen kan beskriva en ellips eftersom både x^2 - och y^2 -termerna är positiv. Det är ingen cirkel eftersom koefficienterna till x^2 - och y^2 -termerna inte är lika.

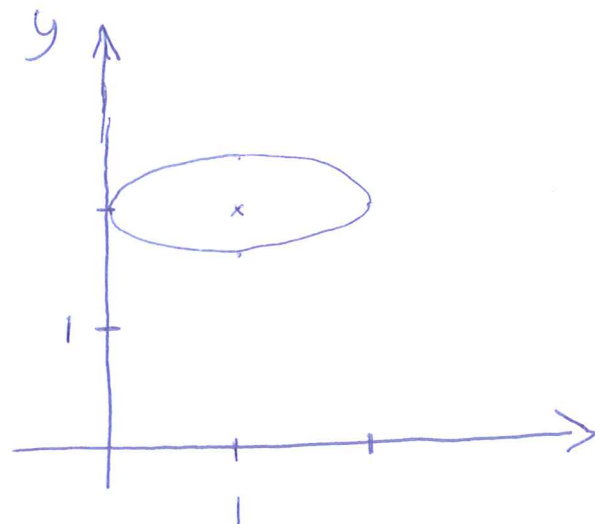
Vi kvadratkompletterar x - och y -uttrycken var för sig.

$$(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) + 36 = 0$$

$$(\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} - 1) + 9(\underbrace{y^2 - 4y + 4}_{(y-2)^2} - 4) + 36 = 0$$

$$(x-1)^2 + 9(y-2)^2 - 1 - 9 \cdot 4 + 36 = 0$$

$$\frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{(y-2)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1$$



storaxeln har
längden 2
och lillaxeln har
längden $\frac{2}{3}$