

SVAR TILL TENTAMEN
Baskurs i matematik
2008-08-31

1.

- a) Enda lösningen är $x = 8$.
- b) Olikheten gäller om $x < -2$ eller $x > 2$.
- c) En ekvation är

$$(x - 2)^2 + y^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0.$$

2. Lösningarna är $x = 3$ och $x = 6$.

(Vi har

$$\log_3 x^2 - \log_3(x - 2) = 2 \Leftrightarrow \log_3 \frac{x^2}{x - 2} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x - 2} = 3^2.$$

Sedan återstår bara att lösa andragradsekvationen $x^2 = 9(x - 2)$.)

3. Olikheten gäller om $2 < x < 5$ eller $x > 5$.

(Om vi till att börja med vill bli av med beloppstecknet så får vi att olikheten kan skrivas:

$$-5 < 2x^2 - 13 < 5 \Leftrightarrow 8 < 2x^2 < 18 \Leftrightarrow 4 < x^2 < 9.$$

Sedan ser vi att till att börja med

$$4 < x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 2) > 0 \Leftrightarrow (x > 2) \vee (x < -2).$$

Motsvarande för den andra olikheten.)

4. Lösningarna ges av: $x = n\pi/3$, $n \in \mathbf{Z}$.

(Ekvationen kan efter användning av formeln för sinus av dubbla vinkeln skrivas

$$(2\sin x \cos x)^2 - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x (4\cos^2 x - 1) = 0.$$

Detta svarar mot de två fallen:

- $\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi$.
- $4\cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \pm 1/2 \Leftrightarrow x = \pm\pi/3 + 2n\pi$, $x = \pm 2\pi/3 + 2n\pi$.

Dessa båda fall kan sammanfattas sålunda: $x = n\pi/3$.)

5. a) Uttrycket är $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Alla komplexa tal på formen $z = x + iy/2$. Geometriskt en vågrät linje genom punkten $(0, 1/2)$.

(Med $z = x + iy$ insatt i ekvationen får vi

$$|(x - iy) + i| = |x + iy| \Leftrightarrow |x + i(1 - y)| = |x + iy| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow -2y + 1 = 0.)$$

7. På 360 sätt.

(Svaret kan skrivas

$$4 \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 1.$$

Detta svarar mot 4 val av rättare till uppgifterna 5 och 8, därefter val av två av de resterande sex uppgifterna etc.)

8. Rötterna är: $\pm 3i, 1 \pm i$.

(Vi vet av problemformuleringen att ekvationen har en rot på formen $z = a i$ med a reell. Insättning av detta ger

$$\begin{aligned} (ai)^4 - 2(ai)^3 + 11(ai)^2 - 18ai + 18 &= 0 \Leftrightarrow a^4 + 2a^3i - 11a^2 - 18ai + 18 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a^4 - 11a^2 + 18) + i(2a^3 - 18a) = 0. \end{aligned}$$

För att denna ekvation skall vara uppfylld måste både realdelen och imaginärdelen vara noll. Om vi sätter imaginärdelen lika med noll får vi

$$2a^3 - 18a = 0 \Leftrightarrow 2a(a^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (a = \pm 3).$$

Vi ser att $a = 0$ inte ger att realdelen blir noll men att däremot $a = \pm 3$ fungerar. Vi har alltså funnit inte bara en utan t.o.m. *två* rötter till den ursprungliga ekvationen, nämligen $z = \pm 3i$. Enligt faktorsatsen skall då polynomet vara delbart med $(z - 3i)(z + 3i) = z^2 + 9$ och vi får

$$z^4 - 2z^3 + 11z^2 - 18z + 18 = (z^2 + 9)(z^2 - 2z + 2).$$

Lösning av den så uppkomna andragradsekvationen $z^2 - 2z + 2 = 0$ ger så svaret.)

Gunnar