

Tenta Baskun 091014 Lösnings

① Dela upp i tre fall:

Fall I $x < 1$, så

$$|x-1| + |x-2| = 1-x+2-x = 3-2x$$

$$3-2x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$$

- inga lösningar då $x < 1$

Fall II $1 \leq x \leq 2$, så

$$|x-1| + |x-2| = x-1+2-x = 1$$

$$1 \leq 1 \text{ alltid sant}$$

- alla x i detta intervall är lösningar

Fall III $x > 2$

$$|x-1| + |x-2| = x-1+x-2 = 2x-3$$

$$2x-3 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 2$$

- inga lösningar då $x > 2$.

Svar: $[1, 2]$ (Kan också ses lätt geometriskt!)

$$\textcircled{2} \quad \frac{\log_3(x+2)}{\log_3 x} = 2 \quad \textcircled{*}$$

Om $x > 0$ och $x \neq 1$ är $\textcircled{*} \Leftrightarrow$

$$\log_3(x+2) = 2 \log_3 x \quad \Leftrightarrow$$

$$\log_3(x+2) = \log_3 x^2$$

Tag 3 upphöjt till både led: Detta ger

$$x^2 - x + 2 = 0 \quad \text{med lösningarna}$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1$$

Endast $x_1 = 2$ är en lösning till $\textcircled{*}$.

③ Basfall $n=1$: $VL = 1 \cdot (1+1) = 2$
 $HL = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$

Induktionsannahme : Annahme

$$\sum_{k=1}^p k(k+1) = \frac{p(p+1)(p+2)}{3} \quad (IH)$$

für något p . Vi vill nästa

$$VL(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1} k(k+1) = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3} = HL(p+1)$$

m.h.a. IH : Nu gör vi det.

$$\begin{aligned} VL(p+1) &= \sum_{k=1}^{p+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^p k(k+1) + (p+1)(p+2) \\ &= \underset{\substack{\uparrow \\ IH}}{\frac{p(p+1)(p+2)}{3}} + \frac{3(p+1)(p+2)}{3} = \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3} \\ &= HL(p+1) \end{aligned}$$

Induktionsaxiomet ger nu resultatet.

USB

④ a) $z = \sqrt{3} + i$

$$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

Alltså skriver vi $z = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)$

vilket är lika med

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 e^{i \frac{\pi}{6}}$$

= z på polar form.

b) $z^5 = \sqrt{3} + i$, antag $z = r e^{i\theta}$

och utnyttja a), ger

$$r^5 e^{i5\theta} = 2 e^{i \frac{\pi}{6}}, \text{ m.a.o.}$$

$$\begin{cases} r^5 = 2 \\ 5\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow r = 2^{1/5}, \quad \theta = \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi}{5} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

~~Detta är en lösning till uppgift 4a)~~

~~Detta är en lösning till uppgift 4b)~~

~~Detta är en lösning till uppgift 4c)~~

④ b) forts. Vi får alla lösningarna

$$z_k = 2^{1/5} e^{\frac{i\pi}{30} + \frac{2\pi}{5}k} \quad k=0,1,2,3,4.$$

⑤ $\cos(2x) - \cos x + \sin^2 x + \frac{1}{4} = 0$

Med hjälp av $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

får vi den ekvivalenta ekvationen

$$\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4} = 0$$

som är en andragsgradsekvation i $\cos x$

med en dubbelrot $\cos x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{2}$ har sedan lösningarna

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

⑥ a) Kvadrathoppetning av andrags-
uttrycken ger

$$2(x^2 - 6x) + y^2 - 2y + 15 = 2((x-3)^2 - 9) + (y-1)^2 - 1 + 15 \\ = 2(x-3)^2 + (y-1)^2 - 4$$

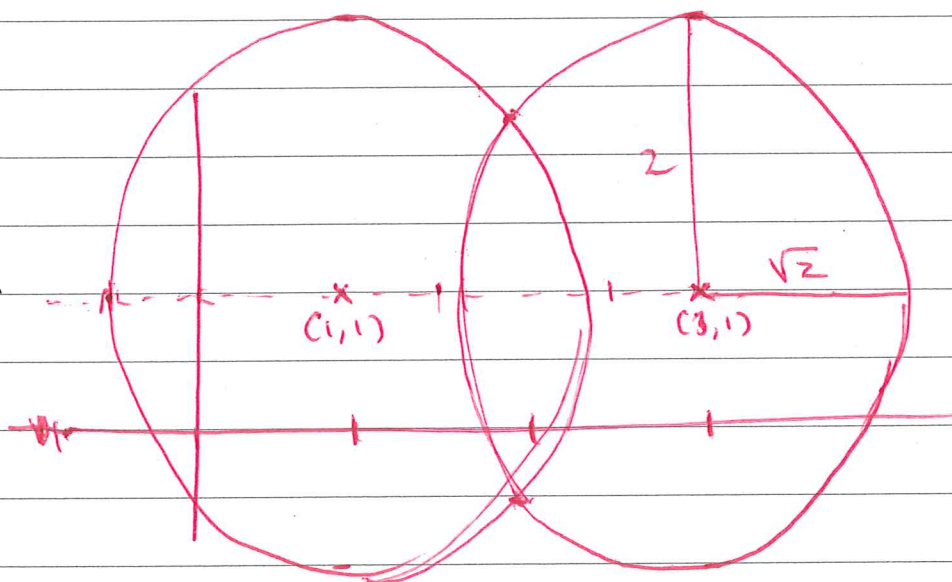
regulære

$$2(x^2 - 2x) + y^2 - 2y - 1 = 2((x-1)^2 - 1) + (y-1)^2 - 2 \\ = 2(x-1)^2 + (y-1)^2 - 4$$

Ellipserne skildes på standardform:

$$\begin{cases} \frac{(x-3)^2}{\sqrt{2}^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1 \\ \frac{(x-1)^2}{\sqrt{2}^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1 \end{cases}$$

Two identical
ellipses shifted
in x-direction with
2 lengths.



b) Skärningspunkterna fås genom

att t.ex. subtrahera ekvationerna,

vilket ger x-koordinaten ur

$$(x-3)^2 - (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x + 9 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

y-koordinaterna ges sedan genom

insättning i endera ekvationen:

$$2 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Svar: Skärningspunkterna är $(x, y) = (2, 1 \pm \sqrt{2})$

7 a) En triangel är bestående av sju tre hörn

- en delmängd av tre ur en mängd av arton.

(Eftersom punkterna ligger på en cirkel ligger inte tre hörn på en rät linje)

Svar: $\binom{18}{3}$ trianglar

⑦ b) Kalla längerna L_1 och L_2 .

En triangel är bestämd av ett val

av två hörn på L_1 och ett på L_2

eller vice versa: Det finns $9 \cdot \binom{9}{2} \cdot 2$

sådana val.

(Tre punkter på samma linje ger ingen triangel!)

Svar: $18 \cdot \binom{9}{2}$ triangler

⑧ a) Villkoret att $z=1$ och $z=-1$ är

nollställen ger ekvationerna $p(1)=0$ och

$p(-1)=0$ för a och b :

$$\begin{cases} p(1)=0 \\ p(-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ a-b=-1 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad a=1, b=2$$

8) b) $p(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z - 2$

har nu nollställena $z=1$ och $z=-1$

den faktorema $(z-1)$ och $(z+1)$

Dividera $\frac{p(z)}{(z-1)(z+1)}$ för att bestämma

koten,

$$\begin{array}{r|l} z^2 - 2z + 2 & z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z - 2 \\ & \vdots \\ & 0 \end{array}$$

Koten rötter $z^2 - 2z + 2 = 0$

bestems nu lätt till $z = 1 \pm i$

Svar: $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1 + i$, $z_4 = 1 - i$