

Lösningar till tentamen för Baskurs i matematik januari 2010

$$1) \quad -1 \leq \frac{x+3}{x-2} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{x-2}{x-2} + \frac{5}{x-2} \leq 1$$

$$-2 \leq \frac{5}{x-2} \leq 0$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_2 \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_1$$

$$1) \quad \begin{array}{l} x-2 < 0 \\ x < 2 \end{array} \quad \text{och}$$

$$2) \text{ Eftersom } x < 2 \text{ gäller}$$

$$-2(x-2) \geq 5$$

$$-2x + 4 \geq 5$$

$$-1 \geq 2x$$

$$x \leq -\frac{1}{2}$$

$$1) \text{ och } 2)$$

$$x \leq -\frac{1}{2}$$

Kan också lösas genom dekomposition

$$\text{av} \quad -1 \leq \frac{x+3}{x-2}$$

$$\text{och} \quad \frac{x+3}{x-2} \leq 1$$

$$2) \quad \log_2 x + \log_2 (10-x) = 4 \quad 0 < x < 10$$

$$x(10-x) = 2^4$$

$$10x - x^2 = 16$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 16}$$

$$x_1 = 8 \quad x_2 = 2$$

Båda rötterna gäller då de ligger inom till intervall.

$$3) \quad P. \quad 9^n - 1 \text{ är delbart med } 8 \text{ för alla } n \in \mathbb{Z}_+$$

Bevis. Steg 1: ($n=1$)

$$9^1 - 1 = 8 \text{ är delbart med } 8$$

$\therefore$ påst. gäller för $n=1$

Steg 2: (Om påst. gäller för $n=p$ så gäller det för $n=p+1$)

$$(n=p) \quad \text{IA} \quad 9^p - 1 = 8k \quad \text{för något } k$$

$$(n=p+1) \quad 9^{p+1} - 1 = 9^p \cdot 9 - 1 = (8k+1) \cdot 9 - 1 =$$

$$= 8k \cdot 9 + 9 - 1 = 8k \cdot 9 + 8 = 8 \cdot (9k+1) \quad \text{enligt IA}$$

$\therefore 9^{p+1} - 1$ är delbart med 8 om

$9^p - 1$ är delbart med 8

Steg 3: Enligt induktionsaxiomet gäller påståendet för alla $n \in \mathbb{Z}_+$

$$4. \quad \sin(5x + \pi) = \sin x$$

$$1) \quad 5x + \pi = x + n \cdot 2\pi$$

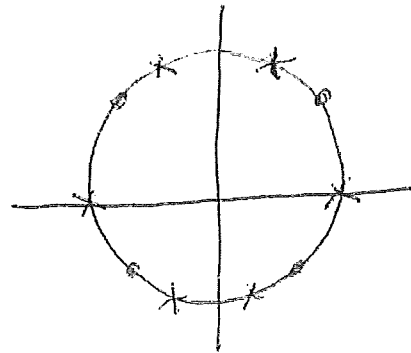
$$4x = -\pi + n \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{2\pi}{2}$$

$$2) \quad 5x + \pi = \pi - x + n \cdot 2\pi$$

$$6x = n \cdot 2\pi$$

$$x = n \cdot \frac{\pi}{3}$$



$$\begin{aligned} 5. a) \quad Z &= \frac{(2+i)^3}{(3-i)^2} = \frac{8 + 12i - 6 - i}{9 - 6i - 1} = \\ &= \frac{2+11i}{8-6i} = \frac{(2+11i)(8+6i)}{100} = \\ &= \frac{-50 + 100i}{100} = -\frac{1}{2} + i \end{aligned}$$

$$b) \quad |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{4} = 2 \quad |1+i| = \sqrt{2}$$

$$\arg(1 + \sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

$$|Z| = 2\sqrt{2}$$

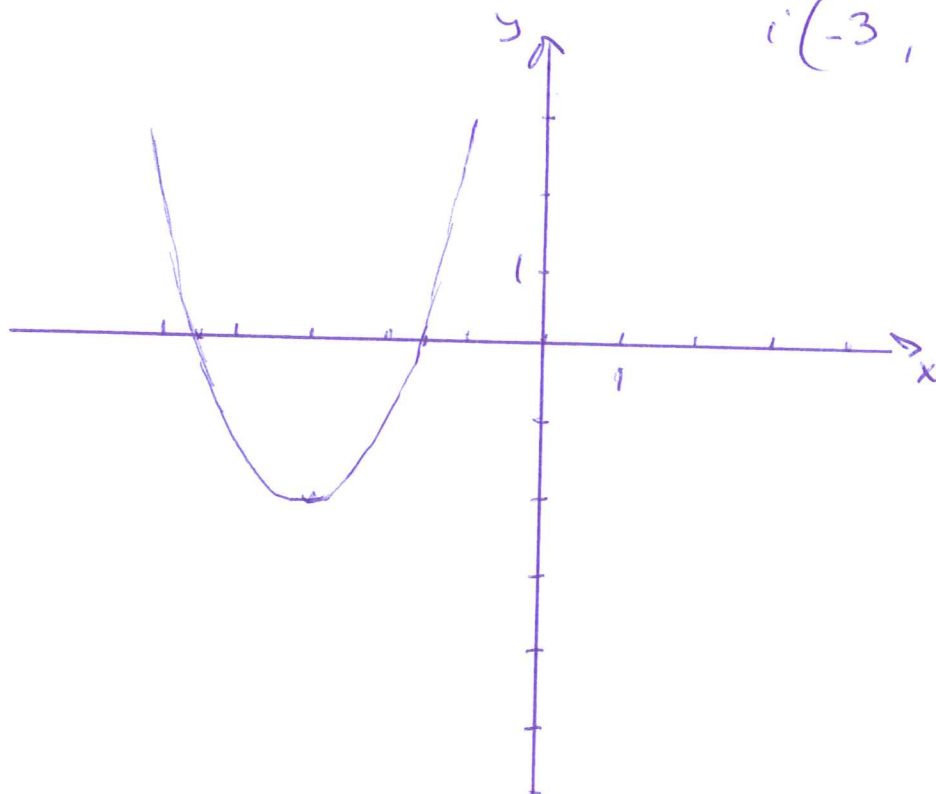
$$\arg Z = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$$

$$6a) \quad x^2 + 6x - y + 7 = 0$$

$$(x^2 + 6x + 9) - y + 7 - 9 = 0$$

$$y = (x+3)^2 - 2$$

dos. en parabel med vertex
i $(-3, -2)$



$$b) \quad x^2 + 6x - y + 7 = 0$$

$$- \quad \frac{6x - y + 9 = 0}{x^2 \quad - 2 = 0}$$

$$x = \pm\sqrt{2} \quad y = 6 \cdot (\pm\sqrt{2}) + 9$$

Skärningspunkter

$$(\sqrt{2}, 6\sqrt{2} + 9) \text{ och } (-\sqrt{2}, -6\sqrt{2} + 9)$$

7a)

$$p(z) = z^5 + z^3 - z^2 - 1$$

har rationella koefficienter

$\therefore p(z) = 0$ har en rot $z = bi$ så

har $p(z) = 0$ också en rot $z = -bi$.

Sätt in $z = bi$ i $p(z) = 0$ $b \neq 0$

$$ib^5 - ib^3 + b^2 - 1 = 0$$

Reeller. $b^2 - 1 = 0$ $b = \pm 1$

Imaginärdel $b^5 - b^3 = 0$ ~~$b = 0$~~ och $b = \pm 1$

$\therefore z = \pm i$ är rötter till $p(z) = 0$

Enligt faktorsatsen är

$p(z)$ delbart med $(z+i)(z-i) = z^2 + 1$

Division:

$$\begin{array}{r} z^3 \quad - 1 \\ \hline z^5 + z^3 - z^2 - 1 \quad | \quad z^2 + 1 \\ \underline{z^5 + z^3} \\ 0 - z^2 - 1 \\ \underline{- z^2 - 1} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore p(z) = (z^2 + 1)(z^3 - 1)$$

De övriga rötter löser ekvationen $z^3 = 1$

$$1 = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi)$$

$$z = \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot k\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot k\right) \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = 1 \quad z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3 = i \quad z_4 = -i$$

8/a)

Tre punkter väljs som hörn
utan hänsyn till ordning.

$$\binom{N}{3} = \frac{1}{6} N(N-1)(N-2)$$

b)

Två punkter på en linje
kombineras med N punkter
på den andra linjen. $\binom{N}{2} \cdot N$

Detta resonemang är giltigt för
båda linjerna. $\therefore$ multiplicera med 2

$$\begin{aligned} 2N \cdot \binom{N}{2} &= 2N \cdot \frac{1}{2} \cdot N(N-1) = \\ &= N^2(N-1) \end{aligned}$$