

Lösningar till till tentamen

Baskurs i matematik 2010-10-25

A-del (Svar)

1) $\frac{1-x}{2}$

2) $\frac{1}{2}$

3) 10000

4) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$

5) $-\frac{3}{2}$

6) stor: 4 till: 2

7) $-\frac{7}{9}$

8) -1, 2

B-del (Lösningar)

9)

$$\frac{2x+1}{x} > 1$$

$$\frac{2x+1}{x} - 1 > 0$$

$$\frac{2x+1-x}{x} > 0$$

$$\frac{x+1}{x} > 0$$

Teckenschema

	-1	0	
$x+1$	-	0	+
x	-	-	0
$\frac{x+1}{x}$	+	0	-

$$x < -1 \text{ eller } x > 0$$

10) Päst $\sum_{k=0}^n 5^k = \frac{5^{n+1}-1}{4}$ för $n \in \mathbb{N}$

Beweis $n=0$: V.L. = $5^0 = 1$ H.L. = $\frac{5^1-1}{4} = 1$

V.L. = H.L. $\therefore$ Päst gäller för $n=0$

Antag, att päst. gäller för $n=p$ dvs $\sum_{k=0}^p 5^k = \frac{5^{p+1}-1}{4}$

$n=p+1$: ~~Antag~~ $\sum_{k=0}^{p+1} 5^k = \frac{5^{p+2}-1}{4}$ skall visas.

$$\text{V.L.} = \sum_{k=0}^p 5^k + 5^{p+1} \stackrel{\text{H.L.}}{=} \frac{5^{p+1}-1}{4} + 5^{p+1} = \frac{5^{p+1}-1+4 \cdot 5^{p+1}}{4} =$$

$$\frac{5^{p+1}(1+4)-1}{4} = \frac{5^{p+2}-1}{4} \stackrel{\text{antagandes}}{=} \text{H.L.} \therefore \text{om päst gäller för } n=p \text{ så gäller det för } n=p+1$$

Enl. induktionsaxiomet gäller det då för alla $n \in \mathbb{N}$. V.S.B.

- 11) Välj kenen först. 1 möjligt val
 Välj honor av 10 (utan ordning) $\binom{10}{2}$
 Mult. principen ger $1 \cdot \binom{10}{2} = 45$ möjliga
 val att välja
 två honor och en kane.

$$12) \frac{(1+i)(i-1)}{2+i} = \frac{i^2-1}{2+i} = \frac{-2}{2+i} = \frac{-2(2-i)}{(2+i)(2-i)} =$$

$$= -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$$

$$13) (x-2)^2 + (y+3)^2 = 3+4+9 =$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2$$

Medelpunkt: $(2, -3)$ radie: 4

$$14) p. a^{\log b} = b^{\log a}$$

Bevis

$$a^{\log b} = \left(b^{\log a} \right)^{\log b} = b^{\log a \cdot \log b} =$$

$$= b^{\log b \cdot \log a} = b^{\log a}$$

I varje steg har en logaritmlag använts.

U.S.B.

Ödel (Lösning)

$$15. \cos^2 x - 3 \sin^2 x = 0 \quad | \quad 4 \sin x = \frac{1}{2}$$

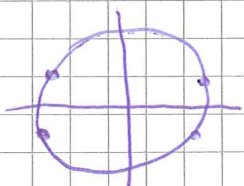
Trig. iden $1 - \sin^2 x - 3 \sin^2 x = 0 \quad | \quad x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

$$1 - 4 \sin^2 x = 0 \quad | \quad x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \quad | \quad 2) \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = \pm \frac{1}{2} \quad | \quad x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$



Svaret kan sammanfattas

$$x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot \pi \quad x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$$

$$16) \quad z^4 = -16$$

$$z^4 = 16 \cdot (-1)$$

$$z^4 = 16 (\cos \pi + i \sin \pi)$$

Polar form

$$z^4 = 2^4 (e^{i(\pi + n \cdot 2\pi)})$$

Potensform

$$z = 2 (e^{i(\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2})})$$

De fyra rötterna för vi (om $0 \leq \arg z < 2\pi$)
för $n = 0, 1, 2, 3$

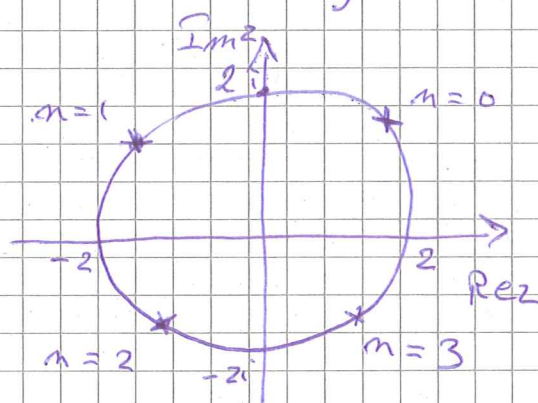
där

$$z_1 = 2 (e^{i \cdot \frac{\pi}{4}})$$

$$z_2 = 2 (e^{i \cdot \frac{3\pi}{4}})$$

$$z_3 = 2 (e^{i \cdot \frac{5\pi}{4}})$$

$$z_4 = 2 (e^{i \cdot \frac{7\pi}{4}})$$



$$17) \quad \left(\frac{x^4}{a} - \frac{1}{x} \right)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \left(\frac{x^4}{a} \right)^k \cdot \left(-\frac{1}{x} \right)^{9-k}$$

För något k gäller:

$$\binom{9}{k} \left(\frac{x^{4k}}{a^k} \right) \cdot \left(-x^{-(9-k)} \right) = \binom{9}{k} \cdot \frac{1}{a^k} \cdot (-1)^{9-k}$$

$$\cdot x^{4k} \cdot x^{-9+k} = -4x$$

eftersom $x^{4k} \cdot x^{-9+k} = x^1$

gäller $4k - 9 + k = 1$

$$k = 2$$

Då gäller för koefficienten med insatt $k=2$:

$$\binom{9}{2} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot (-1)^7 = -4$$

$$-36 \cdot \frac{1}{a^2} = -4$$

$$a = \pm 3$$

Svar: Konstanter

a är 3 eller -3.

18)

$$\lg\left(\frac{100}{x+10}\right) - \lg(x-5) = 0$$

lg - lg

$$\lg 100 - \lg(x+10) - \lg(x-5) = 0$$

$$\lg 100 = 2: \quad \lg(x+10) + \lg(x-5) = 2$$

lg - lg

$$\lg[(x+10) \cdot (x-5)] = 2$$

$$(x+10)(x-5) = 100$$

$$x^2 - 5x + 10x - 50 = 100$$

$$x^2 + 5x - 150 = 0$$

$$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4}}$$

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = -15$$

$$\text{Test: } x = 10: \quad \text{V.L.} = \lg \frac{100}{20} - \lg(10-5) =$$

$$= \lg 5 - \lg 5 = 0 = \text{H.L.}$$

$x = 10$ är en rot

$$x = -15:$$

$$\text{V.L.} = \lg \frac{100}{-15+10} - \lg(-15-5)$$

Svar:

$x = 10$ är rot
till ekvationen.

ej
def

ej
fr

$$\lg a = b$$

gäller att det skall vara

$$a > 0$$

$$x = -15 \quad \text{ej rot.}$$