

Kortfattade lösningar till Övningskutan

HT 2010

$$1/ = \frac{24}{5} - \frac{4}{30} = \frac{14}{3}$$

$$2/ = \sin\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$3/ \quad x^3 - x = 0$$

$$x(x+1)(x-1) = 0$$

$$x = 0 \quad x = -1 \quad x = 1$$

$$4/ \quad 3!$$

$$5/ = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$$

$$6/ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

$$7/ = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{5}$$

$$8/ \quad x = 3 \quad x = -5$$

$$9/ \quad |x - 2| < 3$$

$$10/ \quad S_n = a_1 + (a_1 + d) + \dots + (a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + \dots + (a_n - (n-1)d)$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$11/ \quad a^2 = 49$$

$$a = \left(\pm\right) 7 \quad \text{enl. def.}$$

$$12/ \quad 20 \cdot 19 = 380$$

alt. om bror får läggas
i samma låda (oklar form.)

$$20 \cdot 19 + 20 = 400$$

$$13/ = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^{10})}{\frac{1}{2}} + \frac{-1(1 - (-\frac{1}{2})^{10})}{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) = \frac{341}{1024}$$

$$14/ \quad \text{T.ex.}$$

$$(z-3)(z-2+i)(z-2-i) =$$

$$= z^3 - 7z^2 + 17z - 15$$

$$15/ \quad 1 - 2\sin^2 x + \sin x = 1$$

$$\sin x (1 - 2\sin x) =$$

$$\sin x = 0$$

$$x = n\pi$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

16) I $n=1$: $V.L = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ $H.L = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 $V.L = H.L$ sant för $n=1$

II Antag att $\sum_{k=1}^p \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{p+1}$

Visa att $\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{p+2}$

$V.L_{p+1} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = 1 - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)}$

$= 1 - \frac{1}{p+2} = H.L_{p+1}$ enl antag.

∴ Om påst. sant för $n=p$ så sant för $n=p+1$

III Enl. induktionsaxiomet är påst. sant för alla $n \in \mathbb{Z}_+$

17) $(2x^2 - 5)^{48} = \sum_{k=0}^{48} \binom{48}{k} 2^k x^{2k} (-5)^{48-k}$

$x^{2k} = x^{20}$ Grenbidningen $\Rightarrow k=10$

$k=10$: $\binom{48}{10} \cdot 2^{10} \cdot (-5)^{38} x^{20}$

Koeff. är $\binom{48}{10} \cdot 2^{10} \cdot 5^{38}$

18) Reella koeff. ∴ $z = 1-2i$ är också en rot

∴ $z^4 - 3z^3 + z^2 + 7z - 30$ är jämnt delbart med $z^2 - 2z + 5$.

Polynomdivision ger kortpolynom $z^2 - z - 6$

Faktorisa en ges då efter lösning av ekv $z^2 - z - 6 = 0$

$z^4 - 3z^3 + z^2 + 7z - 30 = (z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)(z - 3)(z + 2)$

Ekvationens samtliga rötter är

$z = 1 + 2i$

$z = 1 - 2i$

$z = 3$

$z = -2$