

Föreläsning 11

Sats 1 Då man ska beräkna beloppet av $z \cdot w$ kan man istället beräkna beloppet av z och beloppet av w multiplicera ihop dessa.

Sats 1' Det gäller att $|zw| = |z||w|$.

Sats 2 Då man ska beräkna argumentet av $z \cdot w$ kan man istället beräkna argumentet av z och argumentet av w addera ihop dessa.

Sats 2' Det gäller att $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

Använder man Sats 2 på $z = \cos u + i \sin u$ och $w = \cos v + i \sin v$ får man additionssatserna för sinus och cosinus.

Om vi låter $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ så säger dessa satser att

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)),$$

detta brukar kallas de Moivres formel (med $r = 1$).

Binomiska ekvationer

En ekvation på formen $z^n = a$ kallas en binomisk ekvation.

Man löser en binomisk ekvation genom att skriva vänsterled (använd de Moivres formel) och högerled på polär form och sedan identifiera belopp och argument.

Exempel

$z^2 = -i$ skrivs på polär form som

$$r^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)) = \cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2).$$

Därför är

$$r^2 = 1 \text{ och } 2\theta = -\pi/2 + 2\pi n,$$

där n är ett heltal.

Detta ger $r = 1$ och $\theta = -\pi/4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Alltså är

$$z = \cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

eller

$$z = \cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Andragradsekvationer

Andragradsekvationer löses i följande steg:

1. Kvadratkomplettera, du får typ $(z + 2 + i)^2 = 7 + 3i$.

2. Skriv talet som kvadreras som $a + ib$, där a och b är reella tal. I detta fall är $z + 2 + i = a + ib$.

3. Utveckla kvadraten igen, och identifiera real och imaginärdel. Du får ett ekvationssystem på formen

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ 2ab = 3 \end{cases}.$$

4. Lös ut b ur andra ekvationen och stoppa in i första ekvationen, multiplicera hela denna ekvation med a^2 .

5. Sätt $t = a^2$. Vår ekvation är nu en andragradsekvation i t , lös den.

6. Bara en av de två lösningarna uppfyller att $t \geq 0$ kasta bort den andra för vi vet att $t = a^2$ är positivt (eller noll).
7. Lös ut vad a är (två lösningar) och använd sedan den andra ekvationen i ekvationssystemet för att bestämma b (ett för varje a).
8. Lös ut från punkt 2 vad z är.