

Föreläsning 1

Kursinformation

All viktig information om kursen ska kunna läsas på kursens hemsida

<http://www2.math.uu.se/~rikardo/baskursen/index.html>

Mängdlära

- * En "samling" av tal kallas för en mängd.
- * Om x tillhör A skriver vi det $x \in A$.
- * Om alla element i mängden A ligger i mängden B skriver vi $A \subseteq B$.
- * $[a, b]$ kallas det slutna intervallet mellan a och b och är alla tal mellan a och b inklusive a och b .
- * (a, b) kallas det öppna intervallet mellan a och b och är alla tal mellan a och b exklusive a och b .

Absolutbelopp

Absolutbeloppet av x skrivs $|x|$ och kan beräknas som x om $x \geq 0$ och $-x$ om $x < 0$.

Ett bra sätt att tänka på absolutbeloppet är som något som tar bort eventuella minustecken och på detta sätt alltid gör talet positivt.

Bråkräkning

Summan av två kvoter beräknas genom att de först sätts på gemensam nämnare och därefter summeras täljarna. Resultatet kan skrivas algebraiskt som

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}.$$

Produkten av två kvoter beräknas genom att täljarna multipliceras ihop och delas med produkten av nämnarna. Algebraiskt skrivs detta som

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}.$$

Kvoten av två kvoter beräknas genom att man först byter plats på täljare och nämnare i det andra bråket och sedan multiplicerar ihop dem. Algebraiskt skrivs detta som

$$\frac{a/c}{b/d} = \frac{a}{c} / \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b} = \frac{ad}{bc}.$$

Föreläsning 2

Polynom

Ett polynom är något som kan skrivas som summor av termer på formen ax^n .

x , $x^{12} - 7x^3 + 2$, 17 och $17 + x$ är exempel på polynom.

Det högsta tal som x upphöjs i kallas polynomets grad.

Konjugat - och kvadrerings-reglerna

Konjugatregeln säger att

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Första kvadreringsregeln säger att

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Andra kvadreringsregeln säger att

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Kvadratkomplettering

Andragradspolynom kan alltid kvadratkompletteras. Man skriver då polynomet som en kvadrat (eventuellt multiplicerat med ett tal) plus ett tal (ett eller båda talen kan vara negativa).

Här är ett exempel:

$$x^2 + 12x - 7 = (x + 6)^2 - 36 - 7 = (x + 6)^2 - 43.$$

Ett krångligare exempel:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x - 7 &= 3(x^2 - 4x - 7/3) \\ &= 3((x - 2)^2 - 4 - 7/3) \\ &= 3(x - 2)^2 - 12 - 7 \\ &= 3(x - 2)^2 - 19 \end{aligned}$$

Föreläsning 3

Andragradsekvationer

En ekvation som kan skrivas på formen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kallas en andragradsekvation.

Andragradsekvationer kan lösas med hjälp av kvadratkomplettering.

$$x^2 + px + q = 0$$

$$(x + p/2)^2 - (p/2)^2 + q = 0$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q$$

$$x + p/2 = \pm \sqrt{p^2/4 - q}$$

$$x = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$$

Det sista uttrycket kallas ofta för pq-formeln. De som tycker det är krångligt att kvadratkomplettera, men är bra på att memorera formler kan använda formeln istället.

Rotekvationer

Då man gör vissa manipulationer med ekvationer (till exempel kvadrerar båda led) kan man skapa falska lösningar. I dessa fall måste man på slutet kontrollera om ens lösningar är riktiga eller falska. Ett allmänt tips är att *alltid* kontrollera sina lösningar.

Summasymbolen

Vi inför en speciell beteckning för att summera många saker samtidigt. Notationen sparar plats och förenklar att förstå krångliga summor. Vi skriver så här:

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \dots + f(b) = \sum_{k=a}^b f(k)$$

Aritmetisk summa

En aritmetisk summa är en summa av termer där skillnaden mellan två på varandra följande termer är samma överallt. En sådan summa kan beräknas genom $\frac{A+B}{2}n$, där A är första termen, B är sista termen och n är antalet termer.

Geometrisk summa

En geometrisk summa är en summa av termer där kvoten mellan två på varandra följande termer är samma överallt. En sådan summa kan beräknas genom $A\frac{k^n-1}{k-1}$, där A är första termen, k är kvoten och n är antalet termer.

Föreläsning 4

Induktion

Ett induktionsbevis är ett bevis där man använder den speciella egenskapen hos heltalen att man kan komma till alla heltal större eller lika med ett speciellt heltal a genom att börja i a och sen lägga till 1 lagom många gånger. I själva verket bevisar man två olika saker i en induktionsbevis:

1. Basfallet: Bevis av påståendet för det minsta n (ovan kallat a) som vi vill visa att påståendet gäller för.
2. Induktionssteget: Bevis för att om påståendet är sant för ett visst n , låt oss kalla detta p , då är det också sant för nästa n , dvs för $n = p + 1$.

Det kan vara underlättande att tänka på heltalen som en stega och då visar man i 1 att man kan ställa sig på stegen och i 2 att man alltid kan klättra ett steg uppåt på stegen.

Man kan därför följa följande mall i fyra punkter då man gör ett induktionsbevis:

1. Bevis för basfall, dvs för det minsta n —värdet.
2. Induktionsantagande: Skriv något i stil med "Antag att "Påstående om p " gäller."
3. Induktionssteget: Bevisa att påståendet gäller för $p+1$. Det är viktigt att tänka på att du ska använda induktionsantagandet här.
4. Avsluta med att säga att "Enligt induktionsprincipen har jag nu visat påstendet för alla n större än eller lika med (vilket tal det nu kan vara, talet från punkt 1)."

Föreläsning 5

Geometri kan beskrivas med algebra

Man kan använda algebra för att beskriva enkla geometriska figurer. Man inför då ett koordinatsystem och om vi kallar de två koordinaterna x och y skriver man sen upp en ekvation (eller olikhet) i x och y där en lösning (x, y) till ekvationen motsvarar en punkt på kurvan.

Linjer

En linje beskrivs av ekvationen

$$y = kx + m,$$

där k är linjens lutning och m bestäms av att linjen skär y -axeln i $(0, m)$.

En linje genom punkten (x_1, y_1) med lutningen k beskrivs av

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Lutningen

Lutningen mellan två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) kan beräknas med formeln

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Avstånd

Avståndet mellan två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) kan beräknas med formeln

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Cirklar

Alla punkter som ligger på avståndet r från punkten (x_1, y_1) bildar cirkeln med radie r och medelpunkt (x_1, y_1) . Cirkelns ekvation kan skrivas som

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2.$$

Föreläsning 6

Kägelsnitt

Ellipser, hyperblar och parabler kallas gemensamt för kägelsnitt. Detta är de kurvor som man kan skära fram ur en (dubbel-)kon genom ett rakt snitt.

En annan geometrisk beskrivning

Vi tar och väljer två punkter som vi kallar brännpunkter och en linje som vi kallar styrlinje.

- En ellips bildas av alla punkter som har samma sammanlagda avstånd till brännpunkterna.
- En hyperbel bildas av alla punkter som har samma skillnad mellan avstånden till brännpunkterna.
- En parabel bildas av alla punkter som har samma avstånd till en brännpunkt som till styrlinjen.

Algebraisk beskrivning

Vi väljer koordinaterna så att brännpunkterna har samma x – eller y –koordinat respektive att styrlinjen är parallell med x –axeln.

En ellipsen beskrivs av ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Här är (x_0, y_0) ellipsens medelpunkt och a och b är ellipsens utsträckning från medelpunkten i x – resp. y –led.

En hyperbel beskrivs av ekvationen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

En parabel beskrivs av ekvationen

$$y = ax^2 + bx + c,$$

vilket kan kvadratkompletteras till

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2.$$

Här är (x_0, y_0) parabelns "vändpunkt", dvs antingen dess lägsta eller högsta punkt, och a beskriver hur fort parabeln växer eller minskar.

Föreläsning 7

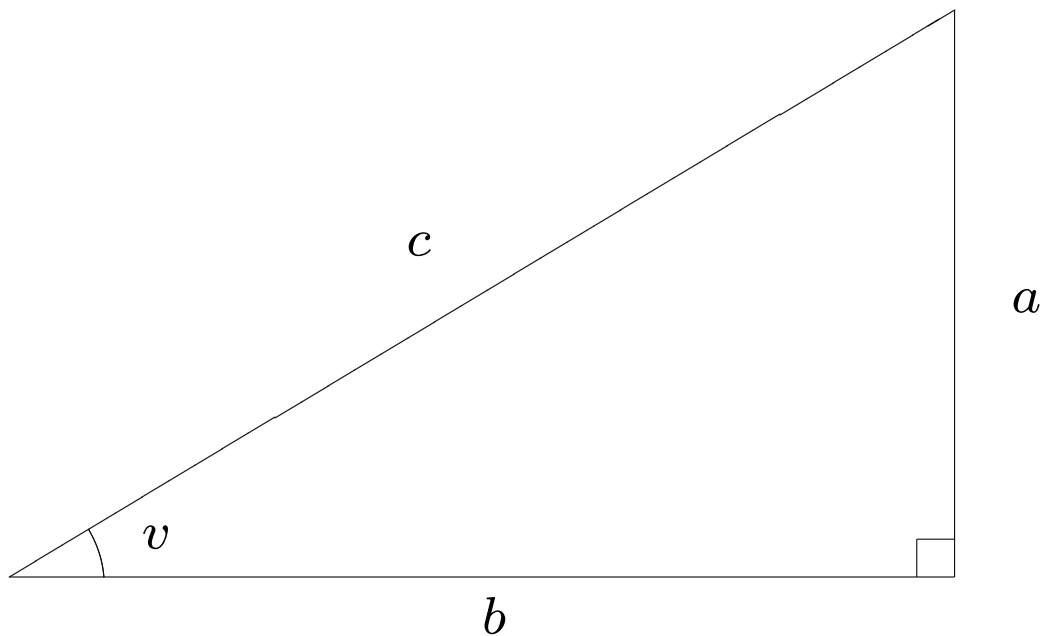
Funktioner

En funktion f är något som för varje x man stoppar in i funktionen så får man ut ett värde. Samma x ger alltid samma värde och värdet brukar betecknas med $f(x)$. Alla de x som man får stoppa in i f kallas för f 's definitionsmängd och alla f 's värden bildar tillsammans f 's värdemängd.

Förflyttningar

- $y = f(x - a)$ motsvarar kurvan $y = f(x)$ flyttad a steg till höger.
- $y = f(x) + a$ motsvarar kurvan $y = f(x)$ flyttad a steg till uppåt.
- $y = f(x/b)$ motsvarar kurvan $y = f(x)$ förstörad b gånger i x -led.
- $y = bf(x)$ motsvarar kurvan $y = f(x)$ förstörad b gånger i y -led.

Trigonometri



Vi definierar sinus, cosinus och tangens genom

$$\begin{aligned}\sin v &= \frac{a}{c} \\ \cos v &= \frac{b}{c} \\ \tan v &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

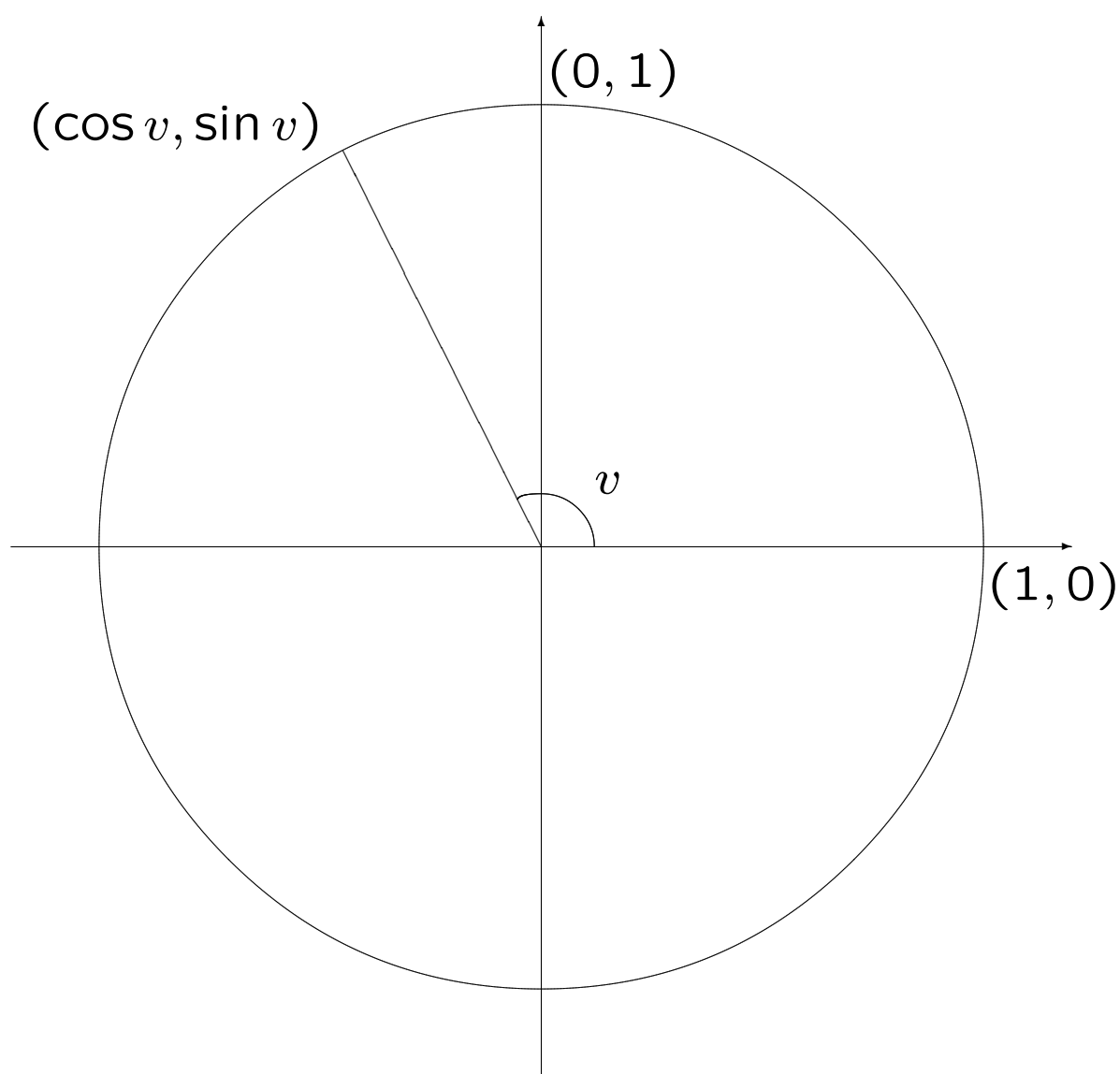
för vinklar $v < 90^\circ$.

Observera att detta ger

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}.$$

Sinus, cosinus och tangens kan generaliseras på ett naturligt sätt till alla vinklar (dvs inte bara spetsiga vinklar) på följande sätt:

Vi säger att $\cos v$ och $\sin v$ är x – resp. y –koordinat till den punkt på enhetscirkeln som bildar vinkeln v med x –axeln.



Vi definierar nu tangens genom

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}.$$

Föreläsning 8

Trigonometriska formler

Sinus och cosinus är periodiska med perioden 2π , dvs det gäller att

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin x$$

och att

$$\cos(x + 2\pi n) = \cos x,$$

för alla heltal n .

Trigonometriska ettan säger att

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Cosinus uppfyller att

$$\cos(-x) = \cos x$$

(detta kallas att cosinus är en jämn funktion) och sinus uppfyller att

$$\sin(-x) = -\sin x$$

(detta kallas att sinus är en udda funktion).

Det gäller att

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$$

och på samma sätt är också

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x.$$

Sinus och cosinus för dubbla vinkeln ges av

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

och

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Det finns också formler för cosinus och sinus av $x + y$ och $x - y$. Exempelvis är

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Inversa trigonometriska funktioner

Den vinkel $0 \leq v \leq \pi$ som uppfyller att $\cos v = x$ kallas $\arccos x$.

Den vinkel $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$ som uppfyller att $\sin v = x$ kallas $\arcsin x$.

Föreläsning 10

Komplexa tal

Vi låter i beteckna ett tal, kallat den imaginära enheten, sådant att $i^2 = -1$.

Alla tal z som kan skrivas som $z = x + iy$, där x och y är reella tal, kallas för komplexa tal.

x kallas för realdelen av z , skrivet $\operatorname{Re}(z)$.

y kallas för imaginärdelen av z , skrivet $\operatorname{Im}(z)$.

Om vi byter tecken på imaginärdelen får vi konjugatet till z , skrivet $\bar{z}$. Med andra ord är

$$\bar{z} = x - iy.$$

En kvot mellan två komplexa tal förenklas genom att man förlänger kvoten med konjugatet till nämnaren och sedan använder konjugatregeln.

Samband mellan komplexa tal och geometri

Man kan representera $z = x + iy$ som en punkt i (x, y) –planet och detta ger en koppling mellan geometri i planet och räkning med komplexa tal.

Avståndet mellan origo och z kallas för beloppet av z , skrivet $|z|$. Med andra ord är

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Vinkeln ned till x –axeln kallas för argumentet av z , skrivet $\arg(z)$.

Sats 1 Då man ska beräkna beloppet av $z \cdot w$ kan man istället beräkna beloppet av z och beloppet av w multiplicera ihop dessa.

Sats 1' Det gäller att $|zw| = |z||w|$.

Sats 2 Då man ska beräkna argumentet av $z \cdot w$ kan man istället beräkna argumentet av z och argumentet av w addera ihop dessa.

Sats 2' Det gäller att $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

Föreläsning 11

Sats 1 Då man ska beräkna beloppet av $z \cdot w$ kan man istället beräkna beloppet av z och beloppet av w multiplicera ihop dessa.

Sats 1' Det gäller att $|zw| = |z||w|$.

Sats 2 Då man ska beräkna argumentet av $z \cdot w$ kan man istället beräkna argumentet av z och argumentet av w addera ihop dessa.

Sats 2' Det gäller att $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

Använder man Sats 2 på $z = \cos u + i \sin u$ och $w = \cos v + i \sin v$ får man additionssatserna för sinus och cosinus.

Om vi låter $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ så säger dessa satser att

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)),$$

detta brukar kallas de Moivres formel (med $r = 1$).

Binomiska ekvationer

En ekvation på formen $z^n = a$ kallas en binomisk ekvation.

Man löser en binomisk ekvation genom att skriva vänsterled (använd de Moivres formel) och högerled på polär form och sedan identifiera belopp och argument.

Exempel

$z^2 = -i$ skrivs på polär form som

$$r^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)) = \cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2).$$

Därför är

$$r^2 = 1 \text{ och } 2\theta = -\pi/2 + 2\pi n,$$

där n är ett heltal.

Detta ger $r = 1$ och $\theta = -\pi/4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Alltså är

$$z = \cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$$

eller

$$z = \cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Andragradsekvationer

Andragradsekvationer löses i följande steg:

1. Kvadratkomplettera, du får typ $(z + 2 + i)^2 = 7 + 3i$.

2. Skriv talet som kvadreras som $a + ib$, där a och b är reella tal. I detta fall är $z + 2 + i = a + ib$.

3. Utveckla kvadraten igen, och identifiera real och imaginärdel. Du får ett ekvationssystem på formen

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ 2ab = 3 \end{cases}.$$

4. Lös ut b ur andra ekvationen och stoppa in i första ekvationen, multiplicera hela denna ekvation med a^2 .

5. Sätt $t = a^2$. Vår ekvation är nu en andragradsekvation i t , lös den.

6. Bara en av de två lösningarna uppfyller att $t \geq 0$ kasta bort den andra för vi vet att $t = a^2$ är positivt (eller noll).
7. Lös ut vad a är (två lösningar) och använd sedan den andra ekvationen i ekvationssystemet för att bestämma b (ett för varje a).
8. Lös ut från punkt 2 vad z är.

Föreläsning 12

Multiplikationsprincipen

Multiplikationsprincipen säger att det totala antalet möjliga utfall av ett antal upprepade val är produkten av antalet valmöjligheter i varje steg.

Vi bryr oss om ordning

Man kan med hjälp av k olika tecken skriva k^n olika ord av längd n om man får återanvända bokstäverna.

Får man bara använda dem en gång blir det istället $k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$ olika ord av längd n .

Som specialfall av detta kan nämnas när $k = n$. Orden kallas då för permutationer av de k tecknena och det finns $k!$ sådana.

Vi bryr oss inte om ordning

Om man ska välja k olika saker av totalt n stycken saker och inte bryr sig om ordningen kan detta val göra på

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

olika sätt.

Binomialsatsen

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

eller om man så vill

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-2} a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n \end{aligned}$$

Föreläsning 13

Polynom

Ett uttryck på formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

kallas ett polynom av grad n .

Man kan dela polynom med varandra, man får då ett nytt polynom plus en rest. Resten har *lägre* grad än det man delade med.

Exempel

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{p_2(x)},$$

här är $q(x)$ det polynom vi får och $r(x)$ betecknar resten. Resten är ett polynom av lägre grad än $p_2(x)$.

För att utföra divisionen kan man använda liggande stolen eller andra metoder i stort sett precis som vanligt.

Faktorsatsen

Polynomet $p(x)$ har nollstället $x = a$ om och endast om $x - a$ är en faktor i $p(x)$, dvs om $p(x)$ kan skrivas som

$$p(x) = (x - a)q(x)$$

för något polynom $q(x)$.

Faktorsatsen säger att de två problemen

1. Faktorisera $p(x)$.
2. Lös polynomekvationen $p(x) = 0$.

i själva verket är samma problem. Kan man lösa det ena har man samtidigt löst det andra.

Föreläsning 14

Algebrans fundamentalsats

Varje polynom av grad minst 1 har minst ett komplext nollställe.

Följdsats 1

Ett polynom av grad n har n olika nollställen (komplexa och räknade med multiplicitet).

Annorlunda formulerat:

En n :tegradsekvation har n olika lösningar.

Följdsats 2

Ett polynom kan alltid faktoriseras som en produkt av (komplexa) förstegradspolynom enligt

$$p(x) = k(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n), \quad (1)$$

där k är koefficienten framför x^n och $a_1, a_2, \dots, a_n$ är polynomets nollställen.

Polynom med reella koefficienter

Låt $p(x)$ vara ett polynom med reella koefficienter. Om α är ett nollställe till $p(x)$ så är även $\bar{\alpha}$ ett nollställe till $p(x)$.

Man kan alltså para ihop de icke-reella nollställena till $p(x)$ i par där de två nollställena är konjugatet till varandra.

Om man multiplicerar ihop $x - \alpha$ och $x - \bar{\alpha}$ får man ett polynom med reella koefficienter. Man kan därför alltid faktorisera ett reellt polynom i reella polynom, gör så här:

Faktorisera först $p(x)$ med hjälp av komplexa första-gradspolynom (se (1)) och multiplicera sedan ihop de komplexkonjugerade faktorerna.

Föreläsning 15

Potenser

Följande räkneregler gäller för potenser:

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

När finns a^x ?

Man kan bara tala om a^x om minst ett av dessa två gäller:

1) x är ett heltal.

2) $a > 0$.

Roten ur a

$a^{1/n}$, där n är ett positivt heltal, kallas n -te-roten ur a och skrivs $\sqrt[n]{a}$.

Speciellt är $a^{1/2} = \sqrt{a}$, uttalat roten ur a . Observera att roten ur uppfyller potensreglerna.

Föreläsning 16

Logaritmer

Låt $a > 0$ vara ett givet tal. Om $b > 0$ finns det precis ett tal x så att

$$a^x = b,$$

vi kallar detta tal ${}^a \log(b)$ (a –logaritmen av b).

${}^a \log(b)$ är alltså det tal man ska upphöja a med för att få b .

Observera att logaritmen bara är definierad (har betydelse) för $b > 0$ eftersom a^x alltid är större än noll.

Speciella logaritmer

Historiskt sett har 10–logaritmen haft stor betydelse och därför har den en speciell beteckning nämligen $\lg(x)$.

Numera används främst logaritmen med bas e , den så kallade naturliga logaritmen, $\ln(x)$.

Räkneregler

De räkneregler för potenser som vi gick igenom sist kan översättas till räkneregler för logaritmer. Motsvarande räkneregler blir

$${}^a\log(xy) = {}^a\log(x) + {}^a\log(y)$$

$${}^a\log\left(\frac{x}{y}\right) = {}^a\log(x) - {}^a\log(y)$$

$${}^a\log(x^r) = r {}^a\log(x)$$

Man kan också byta bas för en logaritm lätt genom att använda formeln

$${}^a\log(x) = \frac{{}^b\log(x)}{{}^b\log(a)}.$$

Ofta använder man $\ln(x)$ och då blir förstås bytet

$${}^a\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$