UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Bo Styf, 471 3192, 0707-253107

Prov i matematik
Civilingenjörsprogrammen
K, STS, X
Endimensionell analys
2002–03–11

Skrivtid: 15.00 – 20.00. Tillåtna hjälpmedel: Manuella skrivdon och bifogade formler. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng. Påbörja varje uppgift på nytt papper och skriv endast på papperets ena sida.

1. Beräkna gränsvärdena

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos x - 2 - x}{x - \sin x}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x - x^4}{2^x + x^4}.$$

2. Beräkna integralerna

$$\text{(a)} \quad \int_1^4 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}, \qquad \text{(b)} \quad \int_{-1}^1 \frac{\arctan x^3}{1 + x^4}\, dx.$$

3. Området D i xy-planet beskrivs av olikheterna $1 \le x \le 2$ och $0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}$. Bestäm volymen av den kropp som uppstår då D roterar kring y-axeln.

4. Bestäm lösningen $y = y(x)$ till differentialekvationen $y'' - y = 2\,e^{-x}$, som uppfyller $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$.

5. Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^2}\, dx$$

konvergerar och bestäm i så fall dess värde.

6. Rita kurvan $y = x + \sqrt{x^2 + 5x}$ med angivande av definitionsmängd samt eventuella asymptoter och lokala extrempunkter.

7. Avgör för vilka reella värden på talet α som serien

$$\sum_{n=1}^\infty \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^\alpha$$

är konvergent respektive divergent.

8. Låt L_a beteckna den räta linje som skär parabeln $y = x^2$ vinkelrätt i punkten (a, a^2), $a > 0$.
(i) Bestäm en ekvation för L_a.
(ii) Beräkna arean av det begränsade område som ligger mellan parabeln och L_a.
(iii) Bestäm minimum av denna area.

Svar till tentamen i Endimensionell analys 2002–03–11

1. (a) 1, (b) -1.

2. (a) $\ln \frac{9}{4}$, (b) 0.

3. $2\pi\sqrt{3}$.

4. $y = e^x - x\,e^{-x}$.

5. $2\ln 2$

6. $D_f =]-\infty, -5] \cup [0, \infty[$. Asymptoter; $y = -5/2$ då $x \to -\infty$, $y = 2x + 5/2$ då $x \to \infty$. Lokala min-punkter i $x = -5$ och $x = 0$.

7. Konvergent om $\alpha > 1/2$, divergent om $\alpha \leq 1/2$.

8. (i) $y = a^2 + \frac{1}{2} - \frac{x}{2a}$. (ii) $\frac{64a^6 + 48a^4 + 12a^2 + 1}{48a^3}$. (iii) Min-arean är $\frac{4}{3}$ (då $a = \frac{1}{2}$).

Lösningar till tentamen i Endimensionell analys 2002–03–11

Lösning till problem 1. (a) Maclaurinutveckling av e^x, $\cos x$ och $\sin x$ ger

$$\frac{e^x + \cos x - 2 - x}{x - \sin x} = \frac{x^3/6 + O(x^4)}{x^3/6 + O(x^5)} = \frac{1 + O(x)}{1 + O(x^2)} \to 1,$$

då $x \to 0$. (b)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - x^4}{2^x + x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x} - x^4}{2^{-x} + x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}/x^4 - 1}{2^{-x}/x^4 + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

Lösning till problem 2. (a) Med substitutionen $t = \sqrt{x}$, $\Rightarrow x = t^2,\ dx = 2t\,dt$ får vi

$$\int_1^4 \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{2t\,dt}{t^2 + t} = \int_1^2 \frac{2\,dt}{t+1} = [2\ln(t+1)]_1^2 = \ln\frac{9}{4}.$$

(b) Då integranden är udda följer direkt (av symmetriskäl) att integralen är lika med 0.

Lösning till problem 3. Låt den sökta volymen vara V. Med hjälp av rörformeln får vi $V = \int_1^2 2\pi xy\,dx = \int_1^2 2\pi x\sqrt{4-x^2}\,dx$. Substitutionen $u = 4 - x^2$, $\Rightarrow 2x\,dx = -du$, ger sedan

$$V = \int_3^0 -\pi\, u^{\frac{1}{2}} du = \pi\left[-\tfrac{2}{3}\, u^{\frac{3}{2}}\right]_3^0 = 2\pi\sqrt{3}.$$

Lösning till problem 4. Karakteristiska ekvationen $r^2 - 1 = 0$ har rötterna $r_{1,2} = \pm 1$. Homogena lösningen är därför $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Eftersom $2\,e^{-x}$ är en lösning till homogena ekvationen (ta $C_1 = 0$ och $C_2 = 2$) ansätter vi som partikulärlösning $y = y_p = \alpha x e^{-x}$. $\Rightarrow$ $y'' = \alpha(x-2)e^{-x}$, $y'' - y = -2\alpha e^{-x}$. $\Rightarrow \alpha = -1$, d v s $y_p = -xe^{-x}$. Differentialekvationen har alltså den allmänna lösningen $y = C_1 e^x + (C_2 - x)\,e^{-x}$, $\Rightarrow y' = C_1 e^x + (x - 1 - C_2)\,e^{-x}$. Ur villkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$ följer sedan att $C_1 = 1,\ C_2 = 0$, $\Rightarrow y = e^x - x\,e^{-x}$.

Lösning till problem 5. Då integranden är positiv är det bara att "räkna på". Partiell integration och partialbråksuppdelning ger

$$\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]_1^\infty + \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\right) dx = \ln 2 + \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$= \ln 2 + [\ln x - \ln(1+x)]_1^{x\to\infty} = \ln 2 + \left[-\ln\frac{x+1}{x}\right]_1^{x\to\infty} = \ln 2 - 0 + \ln 2 = 2\ln 2.$$

Lösning till problem 6. Funktionen är odefinierad då $x^2 + 5x < 0$, d v s då $-5 < x < 0$, och definierad för övriga reella x. Med hjälp av Maclaurin får vi

$$y = f(x) = x + |x|\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = x + |x|\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{x} + O(\frac{1}{x^2})\right) = x + |x| + \frac{5}{2}\cdot\frac{|x|}{x} + O(\frac{1}{|x|}).$$

Av detta följer genast att $y = x - x - \frac{5}{2} = -\frac{5}{2}$ är (horisontell) asymptot i $-\infty$ medan $y = x + x + \frac{5}{2} = 2x + \frac{5}{2}$ är (sned) asymptot i ∞. För derivatan $f'(x) = 1 + (x + \frac{5}{2})(x^2 + 5x)^{-\frac{1}{2}}$ gäller att den är positiv då $x > 0$ och negativ då $x < -5$. Alltså är funktionen strikt växande för $x > 0$ och strikt avtagande för $x < -5$. Vi har därför lokala minima då $x = 0$ eller $x = -5$. Globalt minimum infaller då $x = -5 = f(-5)$.

Lösning till problem 7. Låt $c_n = (1 - \cos\frac{1}{n})^\alpha$, $n = 1, 2, \ldots$. För varje α och n gäller att $c_n > 0$. Vi jämför $\sum c_n$ med $\sum b_n$, där $b_n = n^{-2\alpha}$. Kvoten c_n/b_n går mot $2^{-\alpha} > 0$, då $n \to \infty$. Enligt kvotvarianten av jämförelsekriteriet konvergerar (divergerar) därför $\sum c_n$ precis då $\sum b_n$ konvergerar (divergerar). $\sum b_n$ kovergerar då $\alpha > \frac{1}{2}$ och divergerar då $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Detsamma gäller därför för $\sum c_n$.

Lösning till problem 8. (i) L_a är inget annat än normalen till parabeln $y = x^2$ i punkten (a, a^2). Den har därför riktningskoefficienten $\frac{-1}{2a}$ och, enligt enpunktsformeln, ekvationen $y = a^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}x$.

(ii) Skärningen mellan L_a och parabeln ges av ekvationen $x^2 = a^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}x = h(x)$, som har lösningarna $x = -a - \frac{1}{2a} = b$ samt $x = a$. Arean av det begränsade området är därför

$$A = \int_b^a (h(x) - x^2)\, dx = \frac{64a^6 + 48a^4 + 12a^2 + 1}{48a^3}.$$

(iii) Sätter vi $t = 2a$ förenklas detta till

$$A = \frac{t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1}{6t^3} = \frac{(t^2+1)^3}{6t^3} = \frac{1}{6} \cdot \left(t + \frac{1}{t}\right)^3.$$

A har därför minimum samtidigt som funktionen $t \mapsto t + 1/t$, d v s då $t = 1$ (svarande mot $a = 1/2$). Minimiarean är $\frac{1}{6} \cdot 2^3 = 4/3$.