UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Bo Styf, 471 3192, 0707-253107

Prov i matematik
Civilingenjörsprogrammen
K, STS, X
Endimensionell analys
2002–06–05

Skrivtid: 15.00 – 20.00. Tillåtna hjälpmedel: Manuella skrivdon och bifogade formler. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng. Påbörja varje uppgift på nytt papper och skriv endast på papperets ena sida.

1. Bestäm, om de existerar, gränsvärdena

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)+\ln(1-2x)}{2-e^{3x}-e^{-3x}}$, (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+5^n+\ln(1+7^n)}{3^{n+2}-5^{n-2}+n^7}$.

2. Lös differentialekvationen $y' = e^{x+y}$, $y(0) = 0$.

3. Beräkna integralerna

(a) $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{dx}{1+e^{-x}}$, (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)dx$.

4. Då området mellan x-axeln och kurvan $y = \dfrac{1}{x^4+1}$, $-\infty < x < \infty$, roteras kring y-axeln bildas en (oändligt utsträckt) kropp. Bestäm volymen av denna.

5. För funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gäller att $f(x) = |x-1| - x$ då $|x| > 2$, medan $f(x) = ax + b$ då $|x| \le 2$. Bestäm a och b så att f blir kontinuerlig.

6. Rita kurvan $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \sqrt{x^2+2x+2}$ med angivande av eventuella asymptoter och lokala extrempunkter.

7. I en punkt på kurvan $y = \dfrac{1}{x+1}$, i första kvadranten, dras tangenten. Denna bildar tillsammans med koordinataxlarna en triangel. Bestäm alla värden som arean av denna triangel kan anta.

8. Avgör om någon av serierna

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}\cos\pi n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{n}}$

divergerar.

Svar till tentamen i Endimensionell analys 2002–06–05

1. (a) $\frac{4}{9}$, (b) -25.

2. $y = -\ln(2 - e^x)$.

3. (a) $\ln\frac{3}{2}$, (b) 0.

4. $\pi^2/2$.

5. $a = -\frac{3}{2}$ och $b = 2$.

6. Asymptoter; $y = x(1/\sqrt{3} - 1) - 1$ då $x \to \infty$, $y = x(1/\sqrt{3} + 1) + 1$ då $x \to -\infty$. Globalt (och strikt) maximum då $x = -1 + 1/\sqrt{2}$.

7. Arean antar alla värden i intervallet $[\frac{1}{2}, \infty[$ (och inga andra värden).

8. Båda serierna är konvergenta.

Lösningar till tentamen i Endimensionell analys 2002–06–05

Lösning till problem 1. (a) Med Maclaurinutveckling fås

$$f(x) = \frac{-4x^2 + O(x^4)}{-9x^2 + O(x^4)} = \frac{4 + O(x^2)}{9 + O(x^2)} \to \frac{4}{9},$$

då $x \to 0$.

(b) De dominanta termerna i täljaren och nämnaren är 5^n respektive -5^{n-2}. Alltså:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 5^n + \ln(1 + 7^n)}{3^{n+2} - 5^{n-2} + n^7} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{-5^{n-2}} = -25.$$

Lösning till problem 2. Med variabelseparation fås $e^{-y}dy = e^x dx$, vilket betyder att lösningen ges av

$$e^x - C = \int e^x dx = \int e^{-y} dy = -e^{-y},$$

dvs $e^{-y} = C - e^x$. Då $y(0) = 0$ får vi $1 = C - 1$, dvs $C = 2$. Alltså $e^{-y} = 2 - e^x$ eller $y = -\ln(2 - e^x)$.

Lösning till problem 3. (a) Med substitutionen $t = e^{-x}$, $\Rightarrow x = -\ln t,\ dx = -dt/t$ får vi

$$\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{1 + e^{-x}} = \int_1^{1/2} \frac{-dt}{t(t+1)} = \int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln\frac{3}{2}$$

(b) Då integranden är udda följer direkt (av symmetriskäl) att integralen är lika med 0.

Lösning till problem 4. Låt den sökta volymen vara V. Med hjälp av rörformeln får vi $V = \int_0^\infty 2\pi xy\, dx = \int_0^\infty \frac{2\pi x}{x^4 + 1}\, dx$. Substitutionen $u = x^2$, $\Rightarrow 2x\, dx = du$, ger sedan

$$V = \int_0^\infty \frac{\pi du}{u^2 + 1} = \pi \cdot \pi/2 = \pi^2/2.$$

Lösning till problem 5. Oavsett värdena på a och b är $f(x)$ kontinuerlig då $x \neq \pm 2$. Kontinuitet i dessa båda återstående punkter får vi om och endast om $-1 = f(2^+) = f(2^-) = 2a + b$ samt $-2a + b = f(-2^+) = f(-2^-) = 5$, som ger $a = -\frac{3}{2}$ och $b = 2$.

Lösning till problem 6. Funktionen är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$, ty $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geq 1$. Med hjälp av Maclaurin får vi

$$y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} - |x|\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{3}} + |x|\left(1 + \frac{1}{x} + O(\frac{1}{x^2})\right) = \frac{x}{\sqrt{3}} - |x| - \frac{|x|}{x} + O(\frac{1}{|x|}).$$

Av detta följer genast att $y = x(1/\sqrt{3} - 1) - 1$ är asymptot i ∞ medan $y = x(1/\sqrt{3} + 1) + 1$ är asymptot i $-\infty$. Derivatan $f'(x) = 1/\sqrt{3} - (x+1)(x^2 + 2x + 2)^{-\frac{1}{2}}$ har det enda nollstället $x = -1 + 1/\sqrt{2}$ (rotekvationen har en falsk rot) med teckenväxlingen $+0-$, så vi har ett globalt maximum där.

Lösning till problem 7. Kurvan har i punkten $(a, 1/(a+1))$ $(a \geq 0)$ tangentlinjen $y = (a+1)^{-2}(2a+1-x)$. Denna skär axlarna i $x = b = 2a+1$ respektive $y = h = (a+1)^{-2}(2a+1)$. Arean (A) hos den triangel vi skall undersöka är därför

$$A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\left(\frac{2a+1}{a+1}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{a+1}\right)^2$$

Av det sista uttrycket för A framgår genast att A växer (mot 2) då a växer (mot ∞). Minsta värdet, $\frac{1}{2}$, på A fås då $a = 0$.

Lösning till problem 8. (a) Detta är en alternerande serie vars termer har avtagande absolutbelopp. Alltså konvergerar serien enligt Leibniz konvergenskriterium.

(b) Med hjälp av McLaurin får vi

$$\frac{n^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n}\ln n} - 1}{\sqrt{n}} = \frac{O(\frac{1}{n}\ln n)}{\sqrt{n}} = O\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$$

varav konvergensen framgår.