UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Bo Styf, 471 3192, 0707-253107

Prov i matematik
Civilingenjörsprogrammen
K, STS, X
Endimensionell analys
2003–02–17

Skrivtid: 09.00 – 14.00. Tillåtna hjälpmedel: Manuella skrivdon och bifogade formler. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng. Påbörja varje uppgift på nytt papper och skriv endast på papperets ena sida.

1. Bestäm, om de existerar, gränsvärdena

$$\text{(a)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{1 - \cos 2x}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + n} \right).$$

2. Beräkna integralerna

$$\text{(a)} \quad \int_2^4 x\sqrt{x^2 - 4}\, dx, \qquad \text{(b)} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(\frac{\pi + \sin x}{\pi - \sin x} \right) dx.$$

3. Lös differentialekvationen $xy' + 2y = e^{-x^2}$ för $x > 0$. Bestäm särskilt den lösning för vilken $y(1) = 0$.

4. Låt D vara det begränsade område i första kvadranten som avgränsas av kurvorna $y = 3x$ och $y = x^2$. Bestäm volymen av den kropp som uppstår då D roterar kring y-axeln.

5. Bevisa att $\ln(1 + 2x) > 2x - 2x^2$ då $x > 0$.

6. Rita kurvan $y = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$ med angivande av eventuella asymptoter och lokala extrempunkter.

7. Avgör om någon av serierna

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3 - 2n}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

divergerar.

8. I en punkt på kurvan $y = -\ln x$, i första kvadranten, dras tangenten. Denna bildar tillsammans med koordinataxlarna en triangel i första kvadranten. Vilken är den största area som denna triangel kan ha?

Svar till tentamen i Endimensionell analys 2003–02–17

1. (a) $\dfrac{1}{4}$, (b) 1.

2. (a) $8\sqrt{3}$, (b) 0.

3. $y = \dfrac{C - e^{-x^2}}{2x^2}$ respektive $y = \dfrac{1 - e^{1-x^2}}{2ex^2}$.

4. $\dfrac{27}{2}\pi$.

6. Lodrät asymptot i $x = 0$. $y = x - 3$ är (sned) asymptot i både $+\infty$ och $-\infty$. Strikt lokalt maximum ($= -27/4$) i $x = -2$.

7. Båda serierna är konvergenta.

8. Maximala arean är $2/e$

Lösningar till tentamen i Endimensionell analys 2003–02–17

Lösning till problem 1. (a) Med Maclaurinutveckling fås

$$f(x) = \frac{x^2/2 + O(x^3)}{2x^2 + O(x^4)} = \frac{1 + O(x)}{4 + O(x^2)} \to \frac{1}{4},$$

då $x \to 0$.

(b) Genom förlängning med konjugatkvantiteten fås:

$$a_n = \frac{(n^2 + 3n) - (n^2 + n)}{\sqrt{n^2 + 3n} + \sqrt{n^2 + n}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 3n} + \sqrt{n^2 + n}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 3/n} + \sqrt{1 + 1/n}} \to 1$$

då $n \to \infty$.

Lösning till problem 2. (a) Genom substitutionen $u = \sqrt{x^2 - 4}$, $\Rightarrow u^2 = x^2 - 4$, $u\,du = x\,dx$ får vi

$$\int_{x=2}^{x=4} x\sqrt{x^2 - 4}\,dx = \int_{u=0}^{u=\sqrt{12}} u\,u\,du = \left[u^3/3\right]_{u=0}^{u=\sqrt{12}} = 4\sqrt{12} = 8\sqrt{3}$$

(b) Då integranden är udda

$$f(-x) = \ln\left(\frac{\pi - \sin x}{\pi + \sin x}\right) = -\ln\left(\frac{\pi + \sin x}{\pi - \sin x}\right) = -f(x)$$

följer direkt (av symmetriskäl) att integralen är lika med 0.

Lösning till problem 3. På normalform blir ekvationen $y' + (2/x)y = e^{-x^2}/x$. Den integrerande faktorn är därför $e^G = e^{2\ln x} = x^2$. Efter multiplikation med denna fås ekvationen $\frac{d}{dx}\left[x^2 y\right] = x\,e^{-x^2}$ som har lösningen

$$x^2 y = \int x\,e^{-x^2}\,dx = C_1 - e^{-x^2}/2 \quad \text{dvs} \quad y = \frac{C - e^{-x^2}}{2x^2}.$$

Då $y(1) = 0$ får vi $0 = C - e^{-1}$, dvs $C = 1/e$. Alltså $y = \dfrac{1 - e^{1-x^2}}{2ex^2}$.

Lösning till problem 4. Låt den sökta volymen vara V. Med hjälp av rörformeln får vi

$$V = \int_0^3 2\pi x(3x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^3 (3x^2 - x^3)\,dx = 2\pi\left[x^3 - x^4/4\right]_0^3 = 27\pi/2.$$

Lösning till problem 5. Låt $f(x) = \ln(1 + 2x) - 2x + 2x^2$. Vi ska visa att $f(x) > 0$, då $x > 0$. För derivatan gäller att

$$f'(x) = \frac{2}{1 + 2x} - 2 + 4x = \frac{8x^2}{1 + 2x} > 0,$$

då $x > 0$. Funktionen är alltså strängt växande då $x \geq 0$. Men då $f(0) = 0$ betyder detta att $f(x) > 0$, då $x > 0$.

Lösning till problem 6. Låt $f(x) = x^{-2}(x-1)^3$ (kurvan har alltså ekvationen $y = f(x)$). Vi ser direkt att $x = 0$ är lodrät asymptot. Av likheterna

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2} = x - 3 + \frac{3x-1}{x^2}$$

framgår att $y = x-3$ är (sned) asymptot i både $+\infty$ och $-\infty$ (ty $f(x) - x + 3 \to 0$ då $x \to \pm\infty$).

Vad gäller derivatan har vi

$$f'(x) = 3x^{-2}(x-1)^2 - 2x^{-3}(x-1)^3 = x^{-3}(x-1)^2(x+2) = 0$$

då $x = 1$ eller $x = -2$. För positiva $x \neq 1$ är dock $f'(x) > 0$ så $x = 1$ är en terasspunkt. I $x = -2$ är derivatans teckenväxling $+0-$ så där har vi strikt lokalt maximum

Lösning till problem 7. (a) Låt $a_n = \dfrac{n+1}{n^3 - 2n}$ och $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. För stora n är både a_n och b_n positiva. Dessutom gäller att $a_n/b_n \to 1$ då $n \to \infty$. Då $\sum b_n < \infty$ drar vi, med hjälp av kvotvarianten av jämförelsekriteriet, slutsatsen att $\sum a_n$ konvergerar.

(b) Låt här $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ och $b_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. Både a_n och b_n är positiva. Med hjälp av McLaurin får vi

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6n\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{1}{6n\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)$$

varav framgår att $a_n/b_n \to 1/6$ då $n \to \infty$. Återigen medför kvotvarianten av jämförelsekriteriet att $\sum a_n$ konvergerar.

Lösning till problem 8. Kurvan har i punkten $(t, -\ln t)$ $(0 < t \leq 1)$ tangentlinjen $y = -\ln t - (1/t)(x-t) = -\ln t + 1 - x/t$. Denna skär axlarna i $x = t(1 - \ln t)$ respektive $y = h = 1 - \ln t$. För arean (A) hos den triangel vi skall undersöka gäller därför

$$f(t) = 2A = t(1 - \ln t)^2, \qquad 0 < t \leq 1.$$

Vi deriverar $f(t)$ och får $f'(t) = -(1 - \ln t)(1 + \ln t) = 0$ då $t = 1/e$, med teckenväxlingen $+0-$. Maximala triangelarean är därför $f(1/e)/2 = 2/e$.