UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Bo Styf, 471 3192, 0707-253107

Prov i matematik
Ingenjörsprogrammen
EI, IT, K, STS
Endimensionell analys
2005–03–23

Skrivtid: 14.00 – 19.00. Tillåtna hjälpmedel: Manuella skrivdon och bifogade formler. Lösningarna skall vara försedda med motiveringar. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng. Påbörja varje uppgift på nytt papper och skriv endast på papperets ena sida.

1. Bestäm ekvationen för tangentlinjen till kurvan $y = \ln x$ i punkten $(a, \ln a)$, $a > 0$. Finn ett värde på a sådant att tangentlinjen går genom origo.

2. Beräkna gränsvärdena

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x^2}}{x-\ln(1+x)}, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to \infty} \frac{1-e^{-x^2}}{x-\ln(1+x)}.$$

3. Då området $0 \le y \le e^{-x/2}$, $0 \le x < \infty$ roterar kring x-axeln uppstår en (oändlig) kropp. Beräkna volymen av denna.

4. Beräkna integralerna

$$\text{(a)} \quad \int \sqrt{x}\, \ln x \, dx, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)}\, dx$$

5. Lös differentialekvationen $\quad y' - \dfrac{x}{x^2+1}\, y = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}. \quad$ Bestäm särskilt den lösning för vilken $y(0) = 1$.

6. Rita kurvan $y = \dfrac{x^2}{|x|-1}$ med angivande av eventuella asymptoter och lokala extrempunkter.

7. Avgör med tydliga motiveringar om följande serier konvergerar eller divergerar:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n\sqrt{n}}, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

8. I en punkt på kurvan $y = 3 - \sqrt{x}$, i första kvadranten, dras tangenten. Denna bildar tillsammans med koordinataxlarna en triangel i första kvadranten. Vilken är den största area som denna triangel kan ha?

Svar till tentamen i Endimensionell analys 2005–03–23

1. Tangenten har ekvationen $y = -1 + \ln a + x/a$. Den går genom origo då $a = e$.

2. (a) 2, (b) 0.

3. π volymsenheter.

4. (a) $C + (2/3)x^{3/2} \ln x - (4/9)x^{3/2}$, (b) $1 - \pi/4$.

5. $y = (C + \ln(x^2 + 1))\sqrt{x^2 + 1}$ respektive $y = (1 + \ln(x^2 + 1))\sqrt{x^2 + 1}$.

6. Lodräta asymptoter i $x = \pm 1$. $y = |x| + 1$ är (sned) asymptot i $+\infty$ och $-\infty$.
Strikt lokalt maximum ($= 0$) i $x = 0$. Strikta lokala minima ($= 4$) i $x = \pm 2$.

7. (a) konvergerar medan (b) divergerar.

8. Maximala arean är 8.

Lösningar till tentamen i Endimensionell analys 2005–03–23

Lösning till problem 1. Den allmänna formen, $y = f(a)+f'(a)(x-a)$, för tangentens ekvation ger $y = \ln a + (1/a)(x-a)$ eller $y = -1 + \ln a + x/a$. Villkoret för att tangenten passerar origo är därför $0 = -1 + \ln a$, vilket medför att $a = e$.

Lösning till problem 2. (a) Maclaurinutveckling ger

$$\frac{1-e^{-x^2}}{x-\ln(1+x)} = \frac{x^2+O(x^4)}{x^2/2+O(x^3)} = \frac{1+O(x^2)}{1/2+O(x)} \to 2$$

då $x \to 0$.

(b) Täljaren närmar sig ett, medan nämnaren går mot oändligheten då $x \to \infty$. Alltså är gränsvärdet 0.

Lösning till problem 3. Låt den sökta volymen vara V. Vi får

$$V = \int_0^\infty \pi y^2\,dx = \pi\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \pi.$$

Lösning till problem 4. (a) Med partiell integration fås

$$\int \sqrt{x}\ln x\,dx = \int x^{1/2}\ln x\,dx = (2/3)x^{3/2}\ln x - \int (2/3)x^{3/2}x^{-1}dx =$$

$$= (2/3)x^{3/2}\ln x - \int (2/3)x^{1/2}dx = C + (2/3)x^{3/2}\ln x - (4/9)x^{3/2}.$$

(b) Substitutionen $u = \sqrt{x}$, $x = u^2$, $dx = 2u\,du$ ger

$$\int_{x=0}^{x=1} \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)}\,dx = \int_{u=0}^{u=1}\frac{u}{2(u^2+1)}\,2u\,du = \int_{u=0}^{u=1}\frac{u^2}{u^2+1}\,du =$$

$$= \int_{u=0}^{u=1}\left(1-\frac{1}{u^2+1}\right)du = [u - \arctan u]_{u=0}^{u=1} = 1-\frac{\pi}{4}$$

Lösning till problem 5. Den integrerande faktorn är $e^G = e^{-(1/2)\ln(x^2+1)} = (x^2+1)^{-1/2}$. Efter multiplikation med denna fås ekvationen

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,y\right] = \frac{2x}{x^2+1}$$

som har lösningen

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,y = \int\frac{2x}{x^2+1}\,dx = C + \ln(x^2+1) \quad \text{dvs} \quad y = (C+\ln(x^2+1))\sqrt{x^2+1}$$

Då $y(0) = 1$ får vi $1 = C$, dvs $y = (1+\ln(x^2+1))\sqrt{x^2+1}$.

Lösning till problem 6. Funktionen är jämn så det räcker att undersöka $x \geq 0$. För dessa x har kurvan ekvationen $y = f(x)$ där $f(x) = x^2(x-1)^{-1}$. Vi ser direkt att $x = 1$ är lodrät asymptot. Genom polynomdivision fås

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

varur framgår att $y = x + 1$ är (sned) asymptot i $+\infty$

Vad gäller derivatan har vi

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = 0$$

då ($x = 0$ eller) $x = 2$. I $x = 2$ är derivatans teckenväxling $-0+$ så där har vi strikt lokalt minimum. Då $f'(x) < 0$ för $0 < x < 1$ (och f är jämn) följer att vi har strik lokalt maximum i $x = 0$.

Lösning till problem 7. (a) Låt $a_n = \dfrac{1}{1 + n\sqrt{n}}$ och $b_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Både a_n och b_n är positiva. Dessutom gäller att $a_n/b_n \to 1$ då $n \to \infty$. Då $\sum b_n < \infty$ drar vi, med hjälp av kvotvarianten av jämförelsekriteriet, slutsatsen att $\sum a_n$ konvergerar.

(b) Låt här $a_n = \dfrac{1}{n + \sqrt{n}}$ och $b_n = \dfrac{1}{n}$. Både a_n och b_n är positiva. Dessutom gäller att $a_n/b_n \to 1$ då $n \to \infty$. Då $\sum b_n = \infty$ drar vi, med hjälp av kvotvarianten av jämförelsekriteriet, slutsatsen att $\sum a_n$ divergerar.

Lösning till problem 8. Tangentlinjen, i punkten $(a, 3 - a^{1/2})$ har ekvationen $y = (3 - a^{1/2}) - (1/2)a^{-1/2}(x - a) = 3 - a^{1/2}/2 - (1/2)a^{-1/2}x$. Denna skär axlarna i $x = a^{1/2}(6 - a^{1/2})$ respektive $y = (1/2)(6 - a^{1/2})$, så triangelarean är

$$A = \frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}(6 - a^{\frac{1}{2}})^2$$

där $0 \leq a \leq 9$. Derivering ger

$$\frac{dA}{da} = \frac{3}{8}a^{-\frac{1}{2}}(6 - a^{\frac{1}{2}})(2 - a^{\frac{1}{2}}) = 0$$

då $a = 4$, med teckenväxlingen $+0-$. Alltså har vi den maximala arean $A = 8$ då $a = 4$.