**UPPSALA UNIVERSITET**
**Matematiska institutionen**
Fredrik Dahlgren

Prov i matematik
Teknisk fysik
Envariabelanalys
2007-11-05

*Skrivtid: 13:15 – 15:15. Inga hjälpmedel är tillåtna. (En formelsamling finns på baksidan av duggan.) Varje korrekt lösning är värd 5 poäng. 10 – 14 poäng på duggan motsvarar en godkänd uppgift på den ordinarie tentan. 15 – 20 poäng på duggan motsvarar två godkända uppgifter på den ordinarie tentan. Lösningarna ska vara försedda med noggranna motiveringar. Lycka till!*

**1.** Bestäm följande gränsvärden, om de existerar.

(a) $\displaystyle\lim_{u\to 0+} u \ln \frac{1}{u^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{w\to 0} \frac{1-\cos \pi w}{\sin^2 w}$

**2.** Beräkna $y'$ om

(a) $y = \dfrac{\ln(\sin x)}{\cos x}$

(b) $y = 2^x \sin x \ln x$

(c) $y = \sqrt{x^2 - \sqrt{x}}$

(d) $\pi x^2 y^2 - \cos(xy) = 0$

**3.** Låt $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

(a) Bestäm eventuella kritiska punkter till $f$.

(b) Bestäm eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$.

(c) Skissa grafen till $f$.

**4.** Låt $f(x) = e^{1-x} - x$. Visa att $f$ är inverterbar och beräkna $(f^{-1})'(0)$.

*Var god vänd!*

**Trigonometriska formler:**

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y
\end{aligned}$$

**Maclaurinutvecklingar:**

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3}) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots + \binom{a}{n} x^n + O(x^{n+1}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})
\end{aligned}$$

# Lösningar till dugga i Envariabelanalys 2007-11-05

**Lösning till problem 1.**

(a) Vi har $\lim_{u\to 0+} u\ln\frac{1}{u^2} = \lim_{u\to 0+} u\ln(u^{-2}) = \lim_{u\to 0+} -2u\ln u = 0$ eftersom $\lim_{u\to 0+} u\ln u = 0$.

(b) Maclaurinutveckling ger $\lim_{w\to 0}\frac{1-\cos\pi w}{\sin^2 w} = \lim_{w\to 0}\frac{1-(1-\frac{\pi^2w^2}{2}+O(w^4))}{(w+O(w^3))^2} =$

$\lim_{w\to 0}\frac{\frac{\pi^2w^2}{2}+O(w^4)}{w^2(1+O(w^2))^2} = \lim_{w\to 0}\frac{\frac{\pi^2}{2}+O(w^2)}{(1+O(w^2))^2} = \frac{\pi^2}{2}$.

**Lösning till problem 2.**

(a) $y' = \frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\cos x - \ln(\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x} + \frac{\ln(\sin x)\tan x}{\cos x} = \frac{1}{\sin x}(1+$ $\ln(\sin x)\tan^2 x)$.

(b) $y' = 2^x\ln 2\sin x\ln x + 2^x\cos x\ln x + \frac{2^x\sin x}{x} = 2^x\left(\ln 2\sin x\ln x + \cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$.

(c) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-\sqrt{x}}}\cdot(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}) = \frac{x}{\sqrt{x^2-\sqrt{x}}} - \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{x^2-\sqrt{x}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-\sqrt{x}}} -$ $\frac{1}{4\sqrt{x^3-x\sqrt{x}}}$.

(d) Implicit derivering ger $2\pi xy^2 + 2\pi x^2yy' + \sin(xy)(y+xy') = 0$ så $(2\pi x^2y + x\sin(xy))y' =$ $-2\pi xy^2 - y\sin(xy)$ och

$$y' = \frac{-2\pi xy^2 - y\sin(xy)}{2\pi x^2y + x\sin(xy)} = -\frac{2\pi xy^2 + y\sin(xy)}{2\pi x^2y + x\sin(xy)}.$$

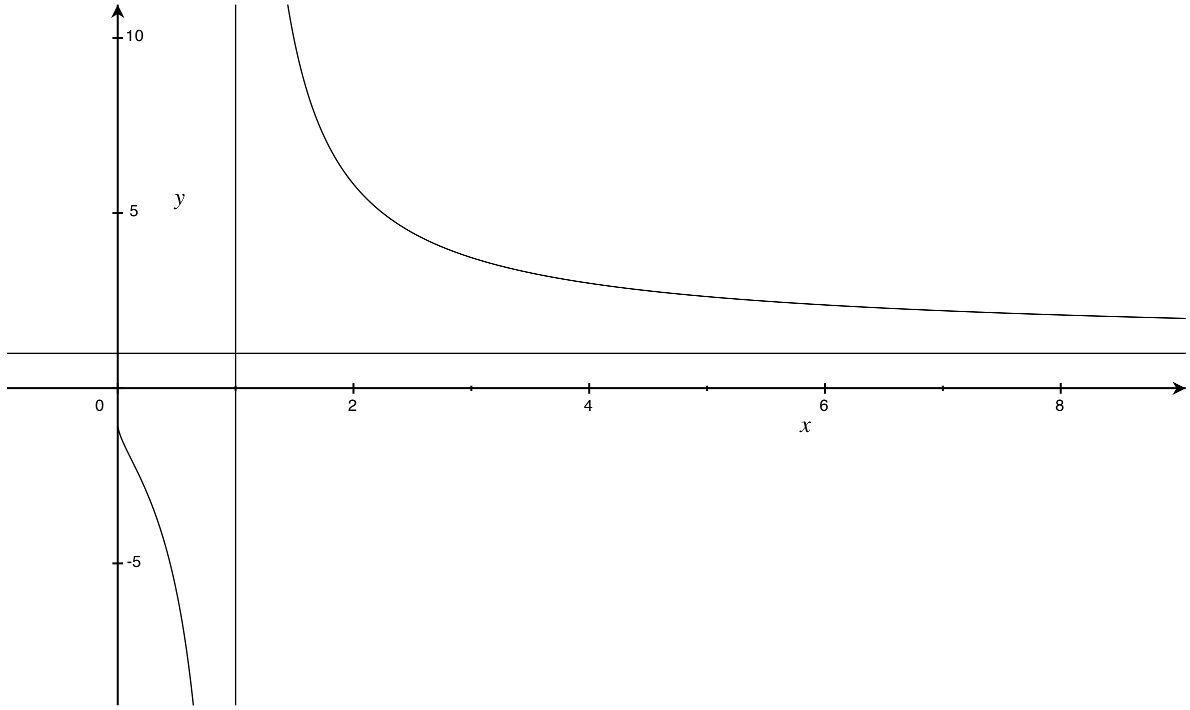
**Lösning till problem 3.**

(a) Vi har $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2} = -\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} < 0$ för alla $x > 0$. Det följer att $f$ inte har några kritiska punkter.

(b) Vi har $\lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x\to 1+} f(x) = \infty$. Alltså är linjen $x = 1$ är en vertikal asymptot till kurvan.

Vi har dessutom $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ så linjen $y = 1$ är en horisontell asymptot till kurvan.

(c) För att skissa grafen noterar vi att $f(0) = -1$. Eftersom derivatan är negativ för alla $x > 0$ och $\lim_{x\to 0+} f'(x) = -\infty$ så måste vi ha en inflektionpunkt i intervallet $(0, 1)$. Grafen har alltså följande utseende:




**Lösning till problem 4.** Derivatan av $f$ ges av $f'(x) = -e^{1-x} - 1$. Det följer att $f'(x) < 0$ för alla $x$, så $f$ är strängt avtagande. Alltså är $f$ ett-till-ett och inverterbar. Vi har

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))}.$$

Eftersom $f^{-1}(0) = x \iff f(x) = 0 \iff x = 1$ är $f^{-1}(0) = 1$. Då $f'(1) = -e^{1-1} - 1 = -2$, så har vi

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{2}.$$