UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen

Dugga
ENVARIABELANALYS
2008-01-25

Skrivtid: 10.00—12.00. Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara försedda med förklarande text. Varje uppgift ger högst 5 poäng.

1. Bestäm följande gränsvärden:

a) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x\, 3^x + (\ln x)^3}{(6x+1)3^x + x^{19}}$

2. a) Derivera $f(x) = \left(\sin \sqrt{7x}\,\right)^3$.

b) Bestäm tangenten till kurvan $y^3 = 8 + x\, e^{2y}$ i den punkt på kurvan där $x = 0$.

c) Derivera $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

3. Låt

$$f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x}.$$

Ange definitionsmängd, eventuella asymptoter och extrempunkter för f. Skissera därefter kurvan $y = f(x)$.

4. Låt

$$f(x) = x - 1 + \arctan\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0.$$

Visa att f är inverterbar och beräkna $(f^{-1})'(\pi/4)$.

SVAR

1. a) Med hjälp av macLaurinutveckling:

$$\lim_{x\to 1}\Big(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\Big)=\lim_{u\to 0}\Big(\frac{u+1}{u}-\frac{1}{\ln(1+u)}\Big)=\lim_{u\to 0}\frac{(1+u)\ln(1+u)-u}{u\ln(1+u)}$$
$$=\lim_{u\to 0}\frac{(1+u)(u-\frac{u^2}{2}+O(u^3))-u}{u(u-\frac{u^2}{2}+O(u^3))}=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{u^2}{2}+O(u^3)}{u^2+O(u^3)}=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{2}+O(u)}{1+O(u)}=\frac{1}{2}.$$

b) Bryt ut och förkorta bort den snabbast växande termen:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x3^x\ +\ (\ln x)^3}{(6x+1)3^x\ +\ x^{19}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x3^x\,(2+\frac{(\ln x)^3}{x3^x})}{x3^x\,(6+\frac{1}{x}+\frac{x^{18}}{3^x})}=\frac{1}{3}$$

.

2. a) $f'(x)=3\sin^2\sqrt{7x}\cdot\cos\sqrt{7x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{7x}}\cdot 7.$

b) Implicit derivering ger $3y^2y'=e^{2y}+x\cdot e^{2y}\cdot 2y'$, vilket ger $y'=\dfrac{e^{2y}}{3y^2-2xe^{2y}}$. När $x=0$ så är $y=2$, vilket ger $y'(0)=\dfrac{e^4}{12}$. Tangentens ekvation blir därför $y-2=\dfrac{e^4}{12}(x-0)$, dvs $y=\dfrac{e^4}{12}x+2$.

c) Efter logaritmering fås $\ln f(x)=x\ln(1+\dfrac{1}{x})$, som deriveras:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(1+\frac{1}{x})+x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1},$$

vilket ger

$$f'(x)=\big(1+\frac{1}{x}\big)^x\,\big(\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}\big).$$

3. Funktionen är uppenbarligen definierad för alla $x\neq 0$. Dessutom är f är en udda funktion ($f(-x)=-f(x)$) så det räcker att betrakta $x>0$. För $0<x\leq 2$ har vi $f(x)=(4-x^2)/x=4/x-x$, varav framgår att kurvan har en lodrät asymptot $x=0$ ($f(x)\to\pm\infty$ då $x\to 0^{\pm}$). För $2\leq x$ gäller att

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x}=x-\frac{4}{x},$$

varav framgår att $y=x$ är asymptot då $x\to\infty$. Då f är udda har vi samma asymptot då $x\to-\infty$. För derivatan gäller att $f'(x)=-4x^{-2}-1<0$ då $0<x<2$, medan $f'(x)=1+4x^{-2}>0$ då $2<x$. Av detta följer att kurvan har ett strikt lokalt minimum $(=0)$ då $x=2$, vilket medför ett strikt lokalt maximum $(=0)$ då $x=-2$.

4. Funktionen kan omskrivas till $f(x)=x-1+\dfrac{\pi}{2}-\arctan x$. Vi har $f(1)=\dfrac{\pi}{4}$ och

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}>0$$

då $x>0$, vilket medför att $f(x)$ är strängt växande för $x>0$ och därför inverterbar. Formeln för inversderivatan ger nu

$$(f^{-1})'(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{1/2}=2.$$