UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erlandsson, Björklund, Hedén, Norman

Prov i matematik
Envariabelanalys
Dugga
20081110

Till varje problem (max 5 poäng per uppgift) krävs fullständiga lösningar. Bonus: 9-13 poäng ger problem 1a) (3p) och 14-20 poäng ger problem 1a) samt 1b) (2p) på ordinarie sluttentamen. Skrivtid: 8.00-10.00. Hjälpmedel: Skrivdon.

1. $$f(x) = x + \frac{1}{x},\ 0 < x < \infty.$$

   Bevisa att funktionen har ett minsta värde och bestäm detta.

2. Låt $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion. Bevisa de korrekta av följande påståenden, och ge motexempel till de falska av dem.

   (a) Om f är kontinuerlig så är f deriverbar.

   (b) Om f är deriverbar så är f kontinuerlig.

   (c) Om f är deriverbar så är f' deriverbar.

3. $$f(x) = x \ln x,\ 0 < x \leq 1.$$

   Bevisa att funktionen har ett minsta värde och bestäm detta. Undersök också om funktionen har något största värde och bestäm i så fall detta.

4. Låt
   $$f(x) = \begin{cases} 2x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{om } x > 0, \\ ax + b & \text{om } x \leq 0. \end{cases}$$

   (a) Bestäm a och b så att f' existerar överallt.

   (b) Med dessa val av a och b, är f' kontinuerlig?