

UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Lars-Åke Lindahl

DUGGA I MATEMATIK
Envariabelanalys
2009–10–26

Skrivtid: 09.00 – 11.00. Inga hjälpmedel.

Varje löst uppgift belönas med maximalt 5 poäng. Maximala totalpoängen är således 20 poäng.

Den som uppnår 10–14 poäng slipper första uppgiften och den som uppnår 15–20 poäng slipper de två första uppgifterna på ordinarie sluttentamen den 16 december 2009.

Lösningarna skall vara försedda med förklarande text.

Lycka till!

1. Beräkna följande gränsvärden

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} \qquad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{1/x} - x^3 e^{-x}}{x^2 \arctan x + x \ln x}$$

2. Sätt $f(x) = \arctan x - \frac{1}{x^2 + 1}$.

- (a) Visa att funktionen f är inverterbar.
- (b) Bestäm värdemängden till f .
- (c) Beräkna inversens derivata i punkten -1 , dvs. $(f^{-1})'(-1)$.
(Observera att $f(0) = -1$.)

3. Definiera en funktion f genom att sätta

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} + e^x & \text{om } x > 0 \\ x + a & \text{om } x \leq 0. \end{cases}$$

- (a) Bestäm konstanten a så att funktionen blir kontinuerlig för $x = 0$.
- (b) Avgör om funktionen f för detta värde på a också är deriverbar i punkten 0 och om derivatan i så fall är kontinuerlig.

4. Undersök kurvan

$$y = 2x + \frac{x}{\ln x}$$

med avseende på lokala extrempunkter, konvexitet/konkavitet och asymptoter. Rita slutligen en enkel skiss över kurvan.