UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen

Prov i matematik

Lösningar till duggan.

1. $f(x)$ är kontinuerlig på det öppna intervallet $0 < x < \infty$. Då $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ har $f(x)$ ett minsta värde enligt Adams' Gift. Minimum erhålles i någon av de punkter där $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ antingen inte existerar eller är lika med 0. Eftersom derivatan existerar överallt och den enda kritiska punkten är $x = 1$ följer att det minsta värdet är $f(1) = 2$.

2. Låt $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion. Bevisa de korrekta av följande påståenden, och ge motexempel till de falska av dem.

   (a) Om f är kontinuerlig så är f deriverbar.

   (b) Om f är deriverbar så är f kontinuerlig.

   (c) Om f är deriverbar så är f' deriverbar.

   Lösning: Eftersom uppgiften är att *bevisa* de korrekta av påståendena, räcker det inte att bara svara *ja* eller *nej* på dem; vi måste även motivera svaren. En förutsättning för att kunna göra det är förstås att man kan definitionerna för kontinuitet respektive deriverbarhet.

   En funktion f är per definition kontinuerlig i en punkt a om och endast om $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ eller, ekvivalent, om $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$. En funktion är deriverbar i en punkt a om och endast om gränsvärdet $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existerar (ändligt). En funktion är kontinuerlig (deriverbar) om den är kontinuerlig (deriverbar) i varje punkt i sin definitionsmängd.

   (a) **Svar:** Falskt. Som motexempel kan vi ta funktionen $f(x) = |x|$, som är kontinuerlig men inte deriverbar i $x = 0$. Att den inte är deriverbar kan man visa genom att jämföra dess höger- och vänsterderivata i origo. Den ena är lika med 1, den andra -1.

   (b) **Svar:** Sant. Vi visar att $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, givet en godtyclig punkt $a \in \mathbb{R}$. Eftersom f är deriverbar i punkten a, har vi

   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$$

   för något tal L, och det måste vi försås utnyttja. Betrakta därför differensen $f(a+h) - f(a)$. Den är lika med

   $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h,$$

   och då ser vi att när $h \to 0$, går $f(a+h) - f(a)$ mot $L \cdot 0 = 0$ (eftersom den första faktorn i uttrycket ovan går mot L, och den andra mot 0 då $h \to 0$). Det visar att $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, så f är kontinuerlig i a.

(c) **Svar:** Falskt. I upppgift 4 finns ett exempel på en funktion som är deriverbar överallt, men vars derivata inte är deriverbar (inte ens kontinuerlig). Men det finns även exempel där det tydligare syns vad som "går fel". Vi kan använda oss av samma idé som i a)-uppgiften, dvs. att funktionen $x \mapsto |x|$ inte är deriverbar i origo. Vi måste då hitta en funktion vars derivata är $x \mapsto |x|$. Vi kan t.ex. ta följande.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2/2, & x \leq 0 \\ x^2/2, & x > 0. \end{cases}$$

3. $f(x)$ är kontinuerlig på det öppna intervallet $0 < x < 1$. Då $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x) = 0$ och $f(x) < 0$ på intervallet $0 < x < 1$ har $f(x)$ ett minsta värde där enligt Adams' Gift. Minimum erhålles i någon av de punkter där $f'(x) = \ln x + 1$ antingen inte existerar eller är lika med 0. Eftersom derivatan existerar överallt och den enda kritiska punkten är $x = e^{-1}$ följer att det minsta värdet på $0 < x < 1$ är $f(e^{-1}) = -e^{-1}$. Nu återstår att kontrollera ändpunkten $x = 1$. Eftersom $f(1) = 0$ och funktionen i övrigt är negativ på definitionsmängden finns inget minsta värde i ändpunkten utan 0 är det största värdet.

4. Låt

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{om } x > 0, \\ ax + b & \text{om } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Bestäm a och b så att f' existerar överallt.

(b) Med dessa val av a och b, är f' kontinuerlig?

Lösning: Vi behöver bara bekymra oss om kontinuitet och deriverbarhet i origo, eftersom det tydligt syns att f är både kontinuerlig och deriverbar i alla övriga punkter.

(a) **Svar:** $a = b = 0$. För att f ska ha någon möjlighet att vara deriverbar måste den vara kontinuerlig. Vi undersöker vilka villkor detta ger på a och b. Att f är kontinuerlig i origo betyder att $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, där $f(0) = a \cdot 0 + b = b$.

Vi använder oss av kramsatsen för att beräkna funktionens högergränsvärde i origo; absolutbeloppet av $\sin \frac{1}{x}$ är mindre än 1, så vi får följande uppskattning för $x > 0$: $|f(x)| = |2x^2 \sin \frac{1}{x}| \leq |2x^2 \cdot 1| = |2x^2|$. Det är ekvivalent med

$$-|2x^2| \leq 2x^2 \sin \tfrac{1}{x} \leq |2x^2|,$$

där vi förstås kan ta bort beloppstecknen om vi vill eftersom x^2 aldrig blir negativt. I vilket fall, så har vi $\lim_{x \to 0+} 2x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$ eftersom både $-2x^2$ och $2x^2$ går mot 0 då x går mot 0.

Vänstergränsvärdet är enklare: $\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} ax + b = b$.

Kravet att f ska vara kontinuerlig ger alltså att $b = 0$, eftersom det gemensamma höger- och vänstergränsvärdet måste vara lika med funktionsvärdet i origo.

Då går vi vidare till frågan om deriverbarhet. Om f ska vara deriverbar i origo, så måste höger- och vänsterderivatan överensstämma där. Observera att dessa definieras som

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}, \text{ respektive } \lim_{h \to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

och <u>INTE</u> som

$$\lim_{x \to 0+} f'(x), \text{ respektive } \lim_{x \to 0-} f'(x).$$

Vänsterderivatan först: $\lim\limits_{h\to 0-} \dfrac{ah}{h} = a$, och sedan högerderivatan:

$$\lim_{h\to 0+} \frac{2h^2 \sin \frac{1}{h} - a\cdot 0}{h} = \lim_{h\to 0+} 2h \sin \tfrac{1}{h} = 0.$$

Den sista likheten bevisas med kramsatsen, precis som tidigare. Villkoret för deriverbarhet i origo är alltså att $a = 0$, eftersom höger- och vänsterderivatan måste vara desamma.

(b) **Svar:** Nej. Enligt kontinuitetsdefinitionen, är f' kontinuerlig i origo om och endast om $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$.

Vi kan beräkna $f'(x)$ för $x > 0$ med produktregeln:

$$D(2x^2 \sin \tfrac{1}{x}) = 4x \sin \tfrac{1}{x} + 2x^2 \cos \tfrac{1}{x} \cdot (-\tfrac{1}{x^2}) = 4x \sin \tfrac{1}{x} - 2\cos \tfrac{1}{x}.$$

Den första av dessa två termer har gränsvärde 0 då $x \to 0$, men den andra har inte något gränsvärde; därför existerar ej $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$. Då existerar förstås inte heller $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$, så i synnerhet kan vi inte ha $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$. Det visar att f' inte är kontinuerlig.

Det kan vara intressant att lägga märke till att f:s högerderivara i origo är lika med 0, men att $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$ inte existerar.