UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Lars-Åke Lindahl

DUGGA I MATEMATIK
Envariabelanalys
2009–10–26

Lösningar

1. (a) Med hjälp av l'Hospitals regel fås

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x^2+1} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{3x^2(x^2+1)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{3(x^2+1)} = -\frac{1}{3}.$$

(b) Standardgränsvärden och räkneregler för gränsvärden ger

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^{1/x} - x^3 e^{-x}}{x^2 \arctan x + x\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - \dfrac{x}{e^x}}{\arctan x + \dfrac{\ln x}{x}} = \frac{e^0 - 0}{\frac{\pi}{2} + 0} = \frac{2}{\pi}.$$

2. Derivatan till $f(x) = \arctan x - \dfrac{1}{x^2+1}$ är

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}.$$

(a) Det följer att $f'(x) \geq 0$ för alla x med likhet endast om $x = -1$. Funktionen f är därför strängt växande och därmed också inverterbar.

(b) Eftersom $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ och funktionen f är kontinuerlig och strängt växande följer det att värdemängden till f är lika med det öppna intervallet $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.

(c) Sätt $y = f(x)$; då svarar $x = 0$ mot $y = -1$. Formeln för inversens derivata ger därför:

$$(f^{-1})'(-1) = \frac{dx}{dy}\Big|_{y=-1} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

3. (a) Funktionen är kontinuerlig om $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Nu är

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \left(x e^{-1/x} + e^x\right) = 0\cdot 0 + 1 = 1$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (x+a) = a = f(0),$$

så gränsvärdet existerar och är lika med $f(0)$ om och endast om $\mathbf{a} = \mathbf{1}$, som alltså är villkoret för kontinuitet i origo.

(b) För $a = 1$ är

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h\mathrm{e}^{-1/h} + \mathrm{e}^h - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \mathrm{e}^{-1/h} + \lim_{h\to 0+} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 0 + \lim_{h\to 0+} \frac{\mathrm{e}^h}{1} = 1$$

(där vi i den näst sista likheten utnyttjat l'Hospitals regel)

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{h + 1 - 1}{h} = 1.$$

Eftersom $f'_+(0) = f'_-(0) = 1$, existerar $f'(0)$ och derivatans värde är $f'(0) = 1$. **Funktionen är således deriverbar för $x = 0$.**

För att avgöra om derivatan också är kontinuerlig i 0 beräknar vi först

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-1/x} + \mathrm{e}^x & \text{för } x > 0 \\ 1 & \text{för } x < 0. \end{cases}$$

Det följer att

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \left(\mathrm{e}^{-1/x} + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-1/x} + \mathrm{e}^x\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1+t}{\mathrm{e}^t} + 1 = 0 + 1 = 1 \qquad \text{och}$$

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} 1 = 1.$$

Eftersom de båda ensidiga gränsvärdena är lika, är $\lim_{x\to 0} f'(x) = 1 = f'(0)$, så **derivatan är kontinuerlig** i 0.

4. Definitionsområdet för kurvan

$$y = f(x) = 2x + \frac{x}{\ln x}$$

består av de två öppna intervallen $0 < x < 1$ och $1 < x < \infty$.

Asymptoter: Vi noterar att

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+} f(x) = \infty.$$

Kurvan har således en vertikal asymptot, nämligen linjen $x = 1$.

Däremot saknas sneda asymptoter, ty visserligen är $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/x = 2$, men $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - 2x = \infty$.

Lokala extrempunkter:

$$y' = 2 + \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = \frac{2(\ln x)^2 + \ln x - 1}{(\ln x)^2} = 2 + \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}.$$

De kritiska punkterna fås genom att sätta $y' = 0$, vilket ger ekvationen

$$2(\ln x)^2 + \ln x - 1 = 0,$$

som är en andragradsekvation i $\ln x$ med de två lösningarna $\ln x = -1$ och $\ln x = \frac{1}{2}$, som ger oss $x = \mathrm{e}^{-1}$ och $x = \mathrm{e}^{1/2}$.

Teckentabell:

x	0		$1/\mathrm{e}$		1		$\sqrt{\mathrm{e}}$	
y'		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$
y		$\nearrow$	max	$\searrow$	$\vert$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Kurvan har således ett lokalt maximum i punkten $(1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e})$ och ett lokalt minimum i punkten $(\sqrt{\mathrm{e}}, 4\sqrt{\mathrm{e}})$.

Konvexitet:

$$y'' = -\frac{1}{x}\frac{1}{(\ln x)^2} + \frac{2}{x}\frac{1}{(\ln x)^3} = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}.$$

Andraderivatan $y'' = 0$ för $\ln x = 2$, dvs. $x = \mathrm{e}^2$.

Teckentabell:

x	0		1		e^2	
y''		$-$	$\vert$	$+$	0	$-$
y		konkav	$\vert$	konvex	infl.pkt	konkav

Kurvan är således konkav i intervallen $]0, 1[$ och $[\mathrm{e}^2, \infty[$ och konvex i intervallet $]1, \mathrm{e}^2]$. Kurvan har en inflexionspunkt i punkten $(\mathrm{e}^2, \frac{5}{2}\mathrm{e}^2)$.

Kurvskiss: