UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Lars-Åke Lindahl

Prov i matmatik
Envariabelanalys
2009–12–16

Lösningar

1. (a) Med hjälp av MacLaurinutveckling fås

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)+x}{\sin x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x-\frac{1}{2}x^2+O(x^3)+x}{x^2+O(x^6)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(-\frac{1}{2}+O(x))}{x^2(1+O(x^4))}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}+O(x)}{1+O(x^4)} = -\frac{1}{2}.$$

l'Hospitals regel går också utmärkt att använda och ger

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)+x}{\sin x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{1}{1-x}+1}{2x\cos x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2x(1-x)\cos x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2(1-x)\cos x^2} = -\frac{1}{2}.$$

(b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 5^n + \ln n}{n+\cos n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln 5 + \ln n}{n+\cos n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 5 + \dfrac{\ln n}{n}}{1+\dfrac{\cos n}{n}} = \ln 5,$ där vi använt standardgränsvärdet $(\ln n)/n \to 0$ och "instängningssatsen" för slutsatsen $(\cos n)/n \to 0$.

2. (a) Eftersom arctan-funktionen är begränsad är

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \arctan\frac{1}{x} + e^{2x} = 0 + e^0 = 1.$$

Funktionen är därför kontinuerlig i 0 om och endast om $a = f(0) = 1$.

(b) För detta a-värde fås därför

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\Big(h\arctan\frac{1}{h} + \frac{e^{2h}-1}{h}\Big)$$
$$= 0 + \lim_{h\to 0} \frac{e^{2h}-1}{h} = 2.$$

(c) För $x \neq 0$ är

$$f'(x) = 2x \arctan \frac{1}{x} + x^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2e^{2x}$$
$$= 2x \arctan \frac{1}{x} - \frac{x^2}{x^2+1} + 2e^{2x}.$$

Det följer att

$$f''(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(2 \arctan \frac{1}{h} - \frac{h}{h^2+1} + 2\frac{e^{2h} - 1}{h}\right)$$

inte existerar, ty den första termen i högerledet saknar gränsvärde då $h \to 0$, medan den andra termen går mot 0 och den tredje termen går mot 4. (Däremot existerar vänsterandraderivatan $f''_-(0) = -\pi + 4$ och högerandraderivatan $f''_+(0) = \pi + 4$.)

3. Differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1+x^2}$$

är separabel och lösningen ges av att

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$
$$-\frac{1}{y} = \arctan x + C.$$

Insättning av begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger $C = -1$, så den sökta lösningen är

$$y = \frac{1}{1 - \arctan x}.$$

4. Variabelsubstitutionen $t = \sqrt{x}$, dvs. $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$ ger

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x + \sqrt{x})(x+1)} = \int_0^\infty \frac{2t\,dt}{(t^2+t)(t^2+1)} = \int_0^\infty \frac{2\,dt}{(t+1)(t^2+1)}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{2}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{1}{t+1} - \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1},$$

så

$$I = \lim_{X \to \infty} \left[\ln(t+1) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \arctan t\right]_0^X$$
$$= \lim_{X \to \infty} \left(\ln \frac{X+1}{\sqrt{X^2+1}} + \arctan X - 0\right) = \ln 1 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

5. Kurvan $y = x\mathrm{e}^{1/x}$ är definierad för $x \neq 0$.

Asymptoter:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{1/x} = \lim_{z\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^z}{z} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{z\to -\infty} \mathrm{e}^z = 0 \cdot 0 = 0.$$

y-axeln är därför vertikal asymptot från höger, men inte från vänster.

MacLaurinutveckling ger vidare

$$y = x\mathrm{e}^{1/x} = x\big(1 + \frac{1}{x} + O(\frac{1}{x^2})\big) = x + 1 + O(\frac{1}{x}),$$

vilket innebär att linjen $y = x + 1$ är sned asymptot.

Lokala extrempunkter:

$$y' = \mathrm{e}^{1/x} - \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{1/x} = \frac{x-1}{x}\,\mathrm{e}^{1/x}.$$

Följaktligen är $x = 1$ en kritisk punkt.

Teckentabell:

x		0		1	
y'	$+$	|	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	|	$\searrow$	min	$\nearrow$

Kurvan har således ett lokalt minimum i punkten $(1, \mathrm{e})$.

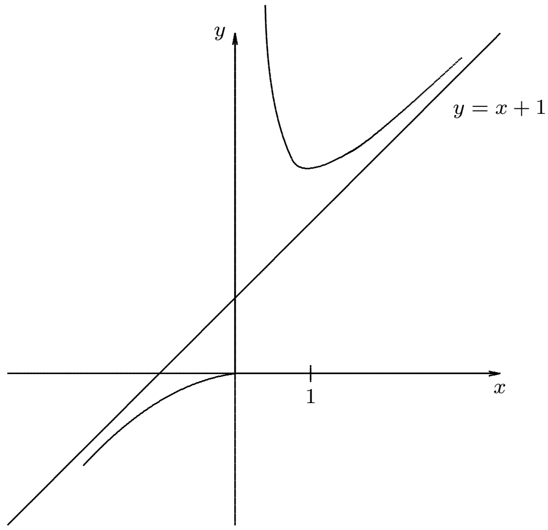
Konvexitet:

$$y'' = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{1/x} + \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{1/x} + \frac{1}{x^3}\,\mathrm{e}^{1/x} = \frac{1}{x^3}\,\mathrm{e}^{1/x}.$$

Teckentabell:

x		0	
y''	$-$	|	$+$
y	konkav	|	konvex

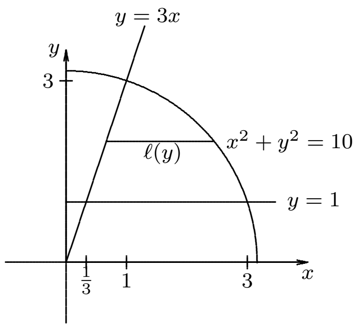
Kurvan är således konkav i intervallet $]-\infty, 0[$ och konvex i intervallet $]0, \infty]$.



Figur 1: Kurvan $y = xe^{1/x}$

6. Linjen $y = 3x$ skär cirkeln i punkten $(1, 3)$ och linjen $y = 3x$ i punkten $(1/3, 1)$. Linjen $y = 1$ skär cirkeln i punkten $(3, 1)$.

En horisontell linje på höjden y, där $1 \leq y \leq 3$, skär cirkeln i punkten med x-koordinat $\sqrt{10 - y^2}$ och linjen $y = 3x$ i punkten med x-koordinat $y/3$, och längden av den del av linjen som ligger i det aktuella området är därför $\ell(y) = \sqrt{10 - y^2} - y/3$.



Figur 2:

Genom att beräkna rotationsvolymen V med hjälp av *skalmetoden* får vi därför

$$V = 2\pi \int_1^3 y\,\ell(y)\,dy = 2\pi \int_1^3 y\Big(\sqrt{10 - y^2} - \frac{y}{3}\Big)\,dy = 2\pi \int_1^3 \Big(y\sqrt{10 - y^2} - \frac{y^2}{3}\Big)\,dy$$

$$= 2\pi\Big[-\frac{(10 - y^2)^{3/2}}{3} - \frac{y^3}{9}\Big]_1^3 = 2\pi\Big(-\frac{1}{3} - 3 + \frac{9 \cdot 3}{3} + \frac{1}{9}\Big) = \frac{104\pi}{9}.$$

Vi kan också beräkna volymen med hjälp av *skivmetoden*. För $\frac{1}{3} \le x \le 1$ är $y = 3x$ övre begränsningskurva och för $1 \le x \le 3$ är cirkelbågen $y = \sqrt{10 - x^2}$ övre begränsningskurva. Det följer att

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{1/3}^{1} 9x^2\,dx + \pi \int_{1}^{3} (10 - x^2)\,dx - \pi \int_{1/3}^{3} 1\,dx \\ &= \pi\Big(\Big[3x^3\Big]_{1/3}^{1} + \Big[10x - \frac{x^3}{3}\Big]_1^3 - (3 - \frac{1}{3})\Big) = \frac{104\pi}{9}. \end{aligned}$$

7. (a) Serien är positiv. Eftersom $\ln n < n^{1/2}$ för stora n, är $\dfrac{\ln n}{n^2} < \dfrac{1}{n^{3/2}}$ för stora n. Serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ är konvergent. Den givna serien är därför **konvergent** enligt jämförelsekriteriet.

(b) $\cos(1/n^2) \to 1$ då $n \to \infty$. Termerna $(-1)^n \cos(1/n^2)$ i serien går därför inte mot 0. Följaktligen är serien **divergent**.

(c) Termerna $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ i serien är positiva och

$$a_n = \mathrm{e}^{n^2 \ln(1-1/n)} = \mathrm{e}^{n^2(-\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}))} = \mathrm{e}^{-n+O(1)} = \mathrm{e}^{O(1)}\, e^{-n} \le K\mathrm{e}^{-n}$$

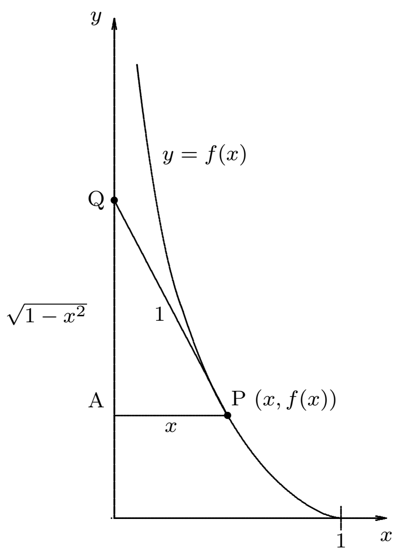
för någon konstant K. Eftersom e^{-n} är term i en konvergent geometrisk serie, följer det att den givna serien är **konvergent**.

Man kan också motivera det hela med rotkriteriet, ty

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-1} < 1.$$

8. Drag tangenten i punkten P med koordinaterna $(x, f(x))$ på kurvan; den skär y-axeln i en punkt Q med koordinaterna $(0, y_Q)$. Pythagoras sats tillämpad på triangeln QAP i figur 3 visar att $QA = \sqrt{1 - x^2}$, så det följer att tangentens lutning är lika med $-\sqrt{1 - x^2}/x$. Å andra sidan ges tangentens lutning av derivatan $f'(x)$, så vi får därför differentialekvationen

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}.$$



Figur 3:

Integrering ger

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = -\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,x\,dx \qquad \left[\begin{array}{l}\sqrt{1-x^2}=t\\ x^2 = 1-t^2\\ x\,dx = -t\,dt\end{array}\right]\\
&= \int \frac{t^2}{1-t^2}\,dt = \int \Big(-1+\frac{1}{1-t^2}\Big)\,dt = -t + \frac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\Big)\,dt\\
&= -t + \frac{1}{2}\big(\ln(1+t)-\ln(1-t)\big) + C = -t + \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} + C\\
&= -t + \frac{1}{2}\ln\frac{(1+t)^2}{1-t^2} + C = -t + \ln\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}} + C\\
&= -\sqrt{1-x^2} + \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + C.
\end{aligned}
$$

Begynnelsevillkoret $f(1) = 0$ ger $C = 0$. Släpkurvans ekvation är därför

$$y = \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} - \sqrt{1-x^2}.$$