Uppsala universitet
Matematiska institutionen
Leif Abrahamsson, Bo Styf
0707-430773 resp. 0707-253107

Tentamen i matematik
Endimensionell analys
EI, IT, K och STS
2004-03-16

Skrivtid: 14–19.
Tillåtna hjälpmedel mm: Bifogat formelblad. **OBS!** De fyra första uppgifterna skall ej lösas om motsvarande dugga och Mapleuppgift är godkänd.

1. Bestäm ekvationen för tangentlinjen till kurvan $y = 1/x^2$ i punkten $(-1, 1)$, samt ekvationen för tangentlinjen till kurvan $y = \ln x$ i punkten $(1/e, -1)$. Bestäm också skärningspunkten mellan dessa bägge tangentlinjer.

2. Bestäm alla lokala extrempunkter till $f(x) = x^2 e^{-x^2}$. Avgör om några av dessa är globala max/min.

3. Beräkna gränsvärdena
$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x - x^2}{1 - e^{x^4}} \qquad \text{samt} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x \sin x - x^2}{1 - e^{x^4}}.$$

4. Området $0 \leq y \leq 1/\sqrt{x(x^2+1)}$, $1 \leq x \leq 2$ roteras ett varv runt x-axeln. Bestäm volymen av den kropp som alstras.

5. Beräkna den generaliserade integralen
$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3} dx.$$

6. Undersök kurvan $y = x^3/(x^2 - 1)$ med avseende på asymptoter och lokala extrempunkter. Skissera kurvan.

7. En cylinderformad burk med höjden 10 meter och radien 4 meter kan tappas på sitt innehåll via en kran i botten. Volymsförändringen vid urtappning bestäms av $V'(t) = -k\sqrt{h(t)}$, där $h(t)$ är vätskenivån i burken vid tiden t och k är en reell konstant, som endast beror på brukens och kranens utformning samt egenskaper hos vätskan. Om burken är halvfull med vatten tar det 60 sekunder att tömma den. Hur lång tid tar det om burken är fylld med vatten?

8. Undersök om följande serier är konvergenta:
$$\sum_{n=1}^\infty e^{-n} \qquad \text{samt} \qquad \sum_{n=1}^\infty n e^{-n}.$$

Förslag till lösningar.

1. Tangentlinjen till $y = 1/x^2$ i punkten $(-1,1)$ har ekvationen $y = 2(x+1)+1 = 2x+3$ och tangentlinjen till $y = \ln x$ i punkten $(1/e,-1)$ har ekvationen $y = e(x-1/e)-1 = ex-2$. Skärningspunkten ges av $2x+3 = ex-2 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{e-2}$, det vill säga $(x,y) = (5/(e-2), (3e+4)/(e-2))$.

2. Vi får $f'(x) = -2x^3e^{-x^2} + 2xe^{-x^2} = 2xe^{-x^2}(1-x^2)$. Alltså är $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = \pm 1$. Teckenstudium:

		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Vi ser alltså att $f(x)$ har lokala max i punkterna $x = \pm 1$ och lokalt min i $x = 0$. Punkterna $x = \pm 1$ är globala max och $f(\pm 1) = e^{-1}$. Vidare är $f(x) > 0$ för alla $x \neq 0$, så $x = 0$ är globalt min.

3. McLaurinutveckling:

$$\frac{x\sin x - x^2}{1-e^{x^4}} = \frac{x(x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots) - x^2}{1-(1+x^4+x^8/2!+\ldots)} =$$

$$= \frac{-x^4/6 + x^6\mathcal{O}(1)}{-x^4 + x^8\mathcal{O}(1)} = \frac{-1/6 + x^2\mathcal{O}(1)}{-1+x^4\mathcal{O}(1)} \to \frac{1}{6},\ x \to 0.$$

Vidare är

$$\frac{x\sin x - x^2}{1-e^{x^4}} = \frac{x^2}{e^{x^4}} \cdot \frac{(\sin x)/x - 1}{e^{-x^4}-1} \to 0,\ x \to \infty.$$

4. Volymen är

$$\pi \int_1^2 (\sqrt{x(x^2+1)})^{-2} dx = \pi \int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)} dx =$$

$$= \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \pi \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^2 =$$

$$= \pi \left(\ln 2 - \frac{\ln 5}{2} + \frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ln\frac{8}{5}.$$

5. Partiell integration ger

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\cdot \ln x\right]_1^\infty - \int_1^\infty \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2x^2}\cdot \ln x\right]_1^\infty + \left[-\frac{1}{4x^2}\right]_1^\infty = \frac{1}{4}.$$

(Om man först gör variabelbytet $t = \ln x$ får man $dt = dx/x$ och $x = e^t$, vilket ger integralen

$$\int_0^\infty te^{-2t}dt,$$

som också beräknas med partiell integration.)

6. Vi får

$$y' = \frac{3x^2}{x^2-1} - \frac{2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2}{(x^2-1)^2}\left(x^2-3\right).$$

Alltså är $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = \pm\sqrt{3}$. Teckenstudium:

		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
y'	$+$	0	$-$	odef.	$-$	0	$-$	odef.	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$	odef.	$\searrow$		$\searrow$	odef.	$\searrow$		$\nearrow$

Alltså är $x = -\sqrt{3}$ ett lokalt max, $x = \sqrt{3}$ är lokalt min och $x = 0$ en terasspunkt.
Asymptoter: $x = \pm 1$ är vertikala asymptoter, och

$$\lim_{x\to -1-}\frac{x^3}{x^2-1} = -\infty,\ \lim_{x\to -1+}\frac{x^3}{x^2-1} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x^3}{x^2-1} = -\infty,\ \lim_{x\to 1+}\frac{x^3}{x^2-1} = \infty$$

Horisontella/sneda asymptoter: Vi har att

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$$

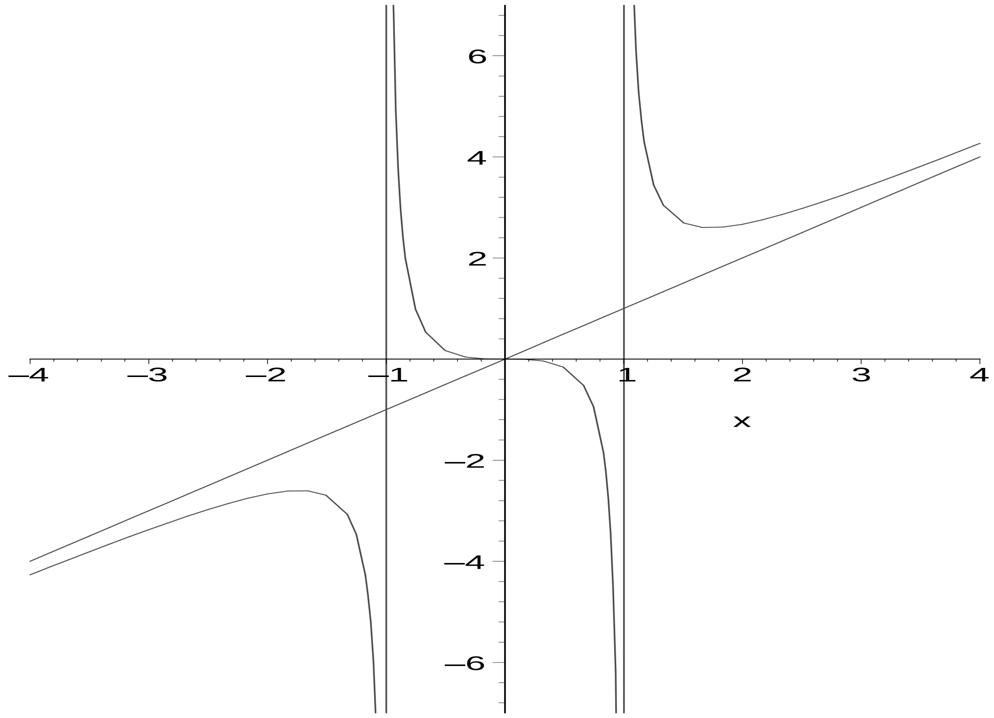
vilket ger att $y = x$ är sned asymptot då $x \to \pm\infty$.
Om man beräknar andraderivatan, vilket inte efterfrågas, får man

$$y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

och teckenstudium av denna ger

		-1		0		1	
y''	$-$	odef.	$+$	0	$-$	odef.	$+$
y	konkav	odef.	konvex		konkav	odef.	konvex

Grafen ser ut som följer:



7. Vi har att volymen vatten vid tiden t är $V(t) = \pi r^2 h(t) = 16\pi h(t)$. Alltså blir $V'(t) = 16\pi h'(t)$, vilket ger

$$16\pi \frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h} \Leftrightarrow \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{kdt}{16\pi} \Leftrightarrow \sqrt{h} = -\frac{kt}{32\pi} + C.$$

$h(0) = 5$ ger $\sqrt{5} = C$ och $h(60) = 0$ ger $0 = -\frac{15k}{8\pi} + \sqrt{5}$, så $k = \frac{8\pi\sqrt{5}}{15}$. Med $h(0) = 10$ fås $C = \sqrt{10}$ och $h(t) = -\frac{kt}{32\pi} + \sqrt{10} = -\frac{\sqrt{5}t}{60} + \sqrt{10}$, så $h(t) = 0$ ger $t = 60\sqrt{2}$. Det tar alltså $60\sqrt{2}$ sekunder att tömma burken om den är full med vatten.

8. Den första serien är en geometrisk serie, och vi får

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \frac{e}{e-1} - 1 = \frac{1}{e-1}.$$

Alltså är denna konvergent. Termerna i den andra serien uppfyller (till exempel) $0 < ne^{-n} \leq n \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ om n är tillräckligt stort, ty $n^3 e^{-n} \to 0,\ n \to \infty$ vilket medför att $n^3 e^{-n} \leq 1$ om n är tillräckligt stort. Alltså är den andra serien också konvergent, enligt jämförelsekriteriet (man kan också använda rot- eller kvotkriteriet för att visa detta).