UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
B. Styf (0707-253107)
I. Sigstam

Prov i matematik
ES, KandKe, K, STS, X, X-bio
Envariabelanalys
2008–06–09

Skrivtid: 9.00 – 14.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon och bifogat formelblad. Varje uppgift är värd 5 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 resp 32 poäng. LÖSNINGARNA SKALL INNEHÅLLA FÖRKLARANDE TEXT.

1. Bestäm följande gränsvärden

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x + x\cos x}{e^x \cdot \ln(1+2x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\sin 3x + x\cos x}{e^x \cdot \ln(1+2x)}$

2. (a) Bestäm derivatan till funktionerna $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = \sin 2x$ och $h(x) = \sin(x^2)$.
(b) Finn ekvationen för tangenten till kurvan $x^3 + y^3 = 6xy$ i punkten $(x, y) = (3, 3)$.

3. Beräkna integralerna: (a) $\displaystyle\int_1^e x(\ln x)^2\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{1+x^4}\,dx$

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy' = y + x^2 \sin x$ för vilken $y(\pi) = 0$.

5. Låt D vara området i 1:a kvadranten som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = 8 - x^2$ samt y-axeln (dvs $x \geq 0$ och $x^2 \leq y \leq 8 - x^2$).

a) Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området D roteras kring x-axeln.
b) Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då området D roteras kring y-axeln.

6. Låt $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$. Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av definitionsmängd samt eventuella asymptoter och lokala extrempunkter.

7. Undersök konvergensen av följande serier:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2+1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^6+n^2+1}}$

8. En tank har formen av en rät cirkulär cylinder med radie r, på vilken en halvsfär med radie r satts som lock, medan botten är plan. Vilken är tankens minimala area om dess volym är $V = \dfrac{5\pi}{3}$? (*Ledning*: Arean av en sfär med radie r är $4\pi r^2$.)

LYCKA TILL!!

Svar till tentamen i Envariabelanalys 2008–06–09

1. a) MacLaurinutveckling ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x + x\cos x}{e^x\cdot\ln(1+2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{3x-\frac{(3x)^3}{3!}+O(x^5)+x\left(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)}{(1+x+O(x^2)\left(2x-\frac{(2x)^2}{2}+O(x^3)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4x-\frac{9}{2}x^3-\frac{1}{2}x^3+O(x^5)}{2x-2x^2+O(x^3)+2x^2-2x^2-2x^3+O(x^4)+O(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4-5x^2+O(x^4)}{2+O(x^2)} = \frac{4}{2} = 2.$$

b) För positiva x gäller $-1\le \sin 3x\le 1$ och $-x\le x\cos x\le x$, och alltså $-1-x\le \sin 3x + x\cos x\le 1+x$. Det följer att

$$\frac{-1-x}{e^x\cdot\ln(1+2x)}\le\frac{\sin 3x + x\cos x}{e^x\cdot\ln(1+2x)}\le\frac{1+x}{e^x\cdot\ln(1+2x)}$$

för positiva x. Men $\dfrac{1+x}{e^x\cdot\ln(1+2x)} = \dfrac{1+x}{e^x}\cdot\dfrac{1}{\ln(1+2x)}\to 0$ då $x\to\infty$, eftersom e^x växer mycket snabbare än alla polynom. Det medför att bråken till vänster och till höger går mot 0. Instängningssatsen ger nu att $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x + x\cos x}{e^x\cdot\ln(1+2x)} = 0.$

Alternativ: Bryt ut snabbast växande: Uttrycket kan skrivas

$$\left(\frac{\sin 3x}{e^x}+\frac{x\cos x}{e^x}\right)\cdot\frac{1}{\ln(1+2x)}.$$

Detta uttryck går mot $(0+0)\cdot 0 = 0$ då $x\to\infty$. **SVAR**: a) 2. b) 0.

2. a) **SVAR:** $f'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$, $g'(x) = 2\cos 2x$ och $h'(x) = 2x\cos(x^2)$.

b) Implicit derivering ger $3x^2+3y^2y' = 6y+6xy'$, som kan förenklas till $y' = \dfrac{6y-3x^2}{3y^2-6x}$. Det följer att derivatan i punkten $(x,y) = (3,3)$ är $y' = -1$. Tangentens ekvation blir därför $y-3 = -1(x-3)$. **SVAR:** $y = 6-x$.

3. a) Partiell integration ger

$$\int_1^e x(\ln x)^2\,dx = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx = \frac{e^2}{2}-\int_1^e x\ln x\,dx$$

$$= \frac{e^2}{2}-\left(\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx\right) = \int_1^e\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{4}(e^2-1).$$

b) Med substitutionen $t = x^2$ fås $dt = 2x\,dx$ och

$$\int_1^\infty\frac{x}{1+x^4}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R\frac{x}{1+x^4}\,dx = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\int_1^{R^2}\frac{dt}{1+t^2} = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan t\right]_1^{R^2}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\left(\arctan R^2-\arctan 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

SVAR: a) $\dfrac{1}{4}(e^2-1)$. b) $\dfrac{\pi}{8}$.

4. Ekvationen är linjär. Skriv först ekvationen på formen $y' - \frac{1}{x}y = x\sin x$. En primitiv funktion till $-\frac{1}{x}$ är $-\ln|x|$, integrerande faktor blir $e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|}$. Vi behandlar först fallet $x > 0$. Efter multiplikation med integrerande faktor kan ekvationen skrivas $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\,y\right) = \sin x$, vilket ger att

$$\frac{1}{x}y = \int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

Alltså blir $y = -x\cos x + Cx$. Konstanten C bestäms begynnelsevillkoret $y(\pi) = 0$, vilket ger att $C = -1$. (När $x < 0$ är integrerande faktor $= -\frac{1}{x}$, och vi får $-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}y\right) = -\sin x$, dvs samma som för $x > 0$). **SVAR:** $y = -x(1+\cos x)$.

5. a) Skivformeln ger $V_x = \int_0^2 \pi[(8-x^2)^2 - (x^2)^2]\,dx = 16\pi \int_0^2 (4-x^2)\,dx = 256\pi/3$.

b) Rörformeln ger $V_y = \int_0^2 2\pi x[(8-x^2) - x^2]\,dx = 4\pi \int_0^2 (4x - x^3)\,dx = 16\pi$.

6. Funktionen är udda. Av omskrivningen $f(x) = x + \frac{x}{x^2-1}$ framgår att $f(x) - x \to 0$ då $|x| \to \infty$ och $|f(x)| \to \infty$ då $x \to \pm 1$ så $y = x$ är sned asymptot då $x \to \pm\infty$ och $x = \pm 1$ är lodräta asymptoter. För derivatan gäller $f'(x) = x^2(x^2-1)^{-2}(x^2-3) = 0$ då $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ och $x = \sqrt{3}$. Teckenväxlingarna hos derivatan visar att det är frågan om en lokal max-punkt, en terrasspunkt respektive en lokal min-punkt.

7. Låt $a_n = \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2+1}}$, $b_n = \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^6+n^2+1}}$, $c_n = \frac{1}{n^{4/3}}$, $d_n = \frac{1}{n}$. Då $a_n/c_n \to 1$ och $b_n/d_n \to 1$ då $n \to \infty$ ger kvotformen av jämförelsekriteriet vid handen att $\sum a_n$ konvergerar medan $\sum b_n$ divergerar (ty $\sum c_n$ konvergerar medan $\sum d_n$ divergerar).

8. Låt cylinderns höjd vara h. Vi har då $V = \pi r^2 h + 2\pi r^3/3 = 5\pi/3$ och $A = \pi r^2 + 2\pi rh + 2\pi r^2 = 3\pi r^2 + 2\pi rh$. Elimination av h ger $f(r) = 3A/\pi = 5r^2 + 10/r$ som skall minimeras. Då $f'(r) = 10(r^3-1)/r^2 = 0$ då $r = 1$ (med teckenväxlingen $-0+$) inser vi att minimala arean är $A_{\min} = \pi f(1)/3 = 5\pi$.