

Skrivtid: 14.00 – 19.00.

Inga hjälpmedel utöver medföljande formelblad.

Varje löst uppgift belönas med maximalt 5 poäng.

Den som hade 10–14 poäng på duggan i okt. 2009 skall inte lösa uppgift 1.

Den som hade 15–20 poäng på duggan skall inte lösa uppgifterna 1 och 2.

Lösningarna skall vara försedda med förklarande text.

Lycka till!

1. Beräkna följande gränsvärden

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x}{\sin x^2} \qquad (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 5^n + \ln n}{n + \cos n}$$

2. Sätt $f(x) = x^2 \arctan \frac{1}{x} + e^{2x}$ för $x \neq 0$ och $f(0) = a$.

(a) Bestäm a så att funktionen f blir kontinuerlig för $x = 0$.

(b) Beräkna $f'(0)$ för detta värde på a .

(c) Undersök slutligen om $f''(0)$ existerar och bestäm i så fall värdet.

3. Lös differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1+x^2}$$

med begynnelsevillkoret $y(0) = 1$.

4. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x + \sqrt{x})(x + 1)}.$$

5. Studera kurvan $y = xe^{1/x}$ med avseende på lokala extrempunkter, asymptoter och konvexitet, samt rita en enkel skiss över kurvan.

6. Området i första kvadranten som ligger innanför cirkeln $x^2 + y^2 = 10$, under linjen $y = 3x$ samt över linjen $y = 1$, roteras kring x -axeln. Bestäm volymen av den uppkomna rotationskroppen.

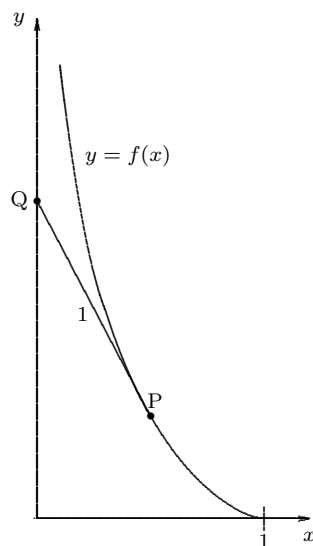
Var god vänd!

7. Avgör med motivering om följande serier konvergerar eller divergerar:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{1}{n^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$.

8. Jultomten är på hemväg utefter positiva x -axeln i riktning mot origo. Han drar sin tunga kälke efter sig i ett 1 längdenheter långt rep. När tomten kommit till fram till origo, viker han av rakt norrut utefter y -axeln med sträckt rep och kälken släpande efter sig. Kälken kommer då att beskriva en kurva $y = f(x)$, som har egenskapen att tangenten (= repet) i varje punkt P på kurvan skär y -axeln i en punkt Q så att avståndet mellan P och Q är lika med 1. Se nedanstående figur.

Bestäm kurvan $y = f(x)$.



Figur 1: Släpkurvan