Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

TENTAMEN
ENVARIABELANALYS
ENDIMENSIONELL ANALYS
2008-03-26

Tentamen består av 8 problem (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar. 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5
Skrivtid: 08.00-13.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

1. Beräkna
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)-\ln(1-x^2)}{e^{x^2}-e^{-x^2}}.$$

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y''+4y=\sin x$ för vilken $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

3. Beräkna integralerna
$$\text{a)}\quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x}\,dx. \qquad\qquad \text{b)}\quad \int_1^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx.$$

4. Skissera kurvan
$$y=\frac{(x^2-1)^2}{x^3}=x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}.$$
Bestäm särskilt definitionsmängden, nollställen samt eventuella lokala extrempunkter, asymptoter och inflexionspunkter.

5. Bestäm det största värdet av funktionen
$$f(x)=x^2e^{-|x-1|}, \quad -\infty<x<\infty.$$
Motivera noggrant.

6. Lös differentialekvationen $y'+\dfrac{2}{x}\,y=\dfrac{1-\cos x}{x^2}, \quad x\neq 0.$

7. Avgör om följande serier är konvergenta eller divergenta.
$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^\infty \frac{n!}{n^n}. \qquad\qquad \text{b)}\quad \sum_{n=1}^\infty (\sin n)(\sin\frac{1}{n^2}).$$

8. Bevisa att om
$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$
så är $f'(0)=0$. Det gäller till och med att att alla derivatorna $f^{(n)}(0)=0$ för $n=1,2,3,\ldots$. Försök även bevisa detta. Skissera slutligen kurvan. Ange särskilt dess asymptoter.

V.G.V!

Trigonometriska formler

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\sin^2(x/2) = (1 - \cos x)/2$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sin x \sin y = (\cos(x-y) - \cos(x+y))/2$
$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$	$\sin x \cos y = (\sin(x+y) + \sin(x-y))/2$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$	$\cos x \cos y = (\cos(x+y) + \cos(x-y))/2$

Maclaurinutvecklingar

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leq 1) \\
\sin^{-1} x &= x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 \leq x \leq 1) \\
\tan^{-1} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \qquad (-1 \leq x \leq 1) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}\,x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\,x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)
\end{aligned}
$$