Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

TENTAMEN
ENVARIABELANALYS
2009-04-18

Tentamen består av 10 uppgifter (max 3 poäng per uppgift) samt 2 problem (max 5 poäng per problem). Till både uppgifterna och problemen fordras fullständiga lösningar. 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5
Skrivtid: 10.00-15.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

UPPGIFTER

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}}{x}$.

2. Bestäm största värdet av $f(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ på intervallet $0 \le x < \infty$. Motivera noggrant.

3. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

4. Bestäm största värdet av $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x}$ på det **slutna** intervallet $0 \le x \le 1$. Motivera noggrant.

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 xe^{-\frac{1}{2}x}\,dx$.

6. Skissera kurvan
$$y = \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x}.$$
Bestäm särskilt definitionsmängden, nollställen samt eventuella asymptoter och lokala extrempunkter.

7. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - y = 1$ för vilken $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

8. Lös differentialekvationen $y' - \dfrac{1}{x}\,y = x, \quad x > 0$.

9. Bestäm summan av serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$.

10. Potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ har konvergensradien lika med 2. Utnyttja bland annat denna information för att bestämma för vilka x serien divergerar, konvergerar absolut respektive konvergerar villkorligt.

V.G.V!

PROBLEM

1.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, \; x \neq 0 \\ 0, \; x = 0 \end{cases} .$$

a) Motivera varför funktionen har ett lokalt maximum i origo.

b) Bevisa att $f'(0) = 0$.

c) Skissera kurvan. Bestäm särskilt alla nollställen samt de lokala extrempunkterna.

2. Genom punkten $(2, -2)$ går tre skilda linjer som tangerar kurvan $y = x^3 - 3x$. Bestäm x-koordinaten för respektive tangeringspunkt. Skissera kurvan och tangenterna genom $(2, -2)$.

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leq 1)$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

Geometriska seriens summa

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1-r}, \; |r| < 1$$