

Tentamen i kursen Envariabelanalys

Måndagen den 24 maj, klockan 8:00-13:00

Varje uppgift belönas med maximalt 5 poäng och maximala totalpoängen är således 40 poäng på tentamen. Dessutom kan man ha erhållit upp till 2 bonuspoäng genom redovisningsuppgifter. För betyget 3 krävs minst 18 poäng, för betyget 4 krävs minst 25 poäng och för betyget 5 krävs minst 32 poäng.

De studenter som fick 15-20 poäng vid duggan är redan tillgodoräknade full poäng på de två första uppgifterna, medan de studenter som fick 10-14 poäng endast är tillgodoräknade full poäng på första uppgiften.

Alla uppgifter skall motiveras väl.

1. Bestäm gränsvärdena

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1 + 3x + x^2)} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{\ln(1 + 3x + x^2)}.$$

2. Visa att $\ln x (\ln x - 2010)^{2009}$ har anti-derivatan $x (\ln x - 2010)^{2010}$.
(Ibland används ordet primitiv funktion istället för anti-derivata.)

3. Hitta en funktion $y(x)$ sådan att $y(1) = 2$ och där

$$(x^3 + 2)^2 y'(x) - 3x^2 y^2 = 0.$$

4. Beräkna

$$\text{a) } \int x^5 \ln x \, dx \quad \text{b) } \int \frac{2 - x + 2x^2}{x + x^3} \, dx.$$

5. Skissa kurvan $y(x) = \ln(e^{2x} + 1) - x$. Bestäm speciellt alla asymptoter och lokala extrempunkter.

6.a) Har funktionen $f(x) = \sin x + e^{-x}$ någon anti-derivata (primitiv funktion) på intervallet $[0, \infty)$?

6.b) Är funktionen $f(x) = \sin x + e^{-x}$ integrerbar på intervallet $[0, \infty)$? Med andra ord; är den generaliserade integralen $\int_0^\infty f(x) \, dx$ konvergent?

7. Avgör om serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(e^n - 1)}$$

är absolutkonverget, betingat konvergent eller divergent?

8. Då en cirkelskiva med radien 1 cm, och vars centrum är 3 cm från y-axeln, roteras kring y-axeln, bildas en kropp som ser ut som en munk. Bestäm volymen av "munken".

Lycka till!