Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

Tentamen
ENVARIABELANALYS
ENDIMENSIONELL ANALYS
2008-12-12

SVAR OCH ANVISNINGAR PROBLEM 1, 3, 5, 7

1. $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty$ så y-axeln och den vertikala linjen $x = 1$ är asymptoter. Eftersom funktionen har dessa negativa oändliga gränsvärden i intervallets ändpunkter, samt har ändliga värden på intervallet $0 < x < 1$ och är kontinuerlig, har funktionen ett största värde enligt en sats i Adams. Det största värdet finns i de singulära eller de kritiska punkterna, dvs där derivatan inte existerar respektive där $f'(x) = 0$. Vi finner att

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln^2 x}\frac{1}{x} = \frac{1}{x}(1 - \frac{1}{\ln^2 x}).$$

Funktionen är alltså deriverbar överallt på intervallet $0 < x < 1$ och det största värdet återfinns i den punkt där $f'(x) = 0$, dvs i de punkter där $\ln^2 x = 1$, dvs där $\ln x = \pm 1$. Eftersom vi söker punkter i intervallet $0 < x < 1$ har derivatan nollställe endast i $x = \dfrac{1}{e}$ och funktionens största värde är därför $f(1/e) = -2$.

3. a) Serien $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$ är en geometrisk serie med kvoten $-\frac{1}{2}$ och är därmed konvergent med summan $\dfrac{1}{1-(-1/2)} = \dfrac{2}{3}$.

   b) Serien är en geometrisk serie med kvoten $\frac{x}{2}$ och konvergerar absolut då $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, dvs då $|x| < 2$. Konvergensradien är alltså 2. Vi måste studera seriens konvergens också i ändpunkterna $x = \pm 2$. Vi får i respektive fall serierna $1 + 1 + 1 + \ldots$ och $1 - 1 + 1 - \ldots$ vilka är divergenta.
   Serien konvergerar alltså för $-1 < x < 1$.

5. a) Den homogena ekvationen $y'' + y = 0$ har karakteristiska ekvationen $r^2 + 1 = 0$ med rötterna $\pm i$ så lösningarna till homogena ekvationen är $y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. För att bestämma en partikulärlösning y_P till den inhomogena ekvationen $y'' + y = 1$ ansättes $y_P = K$. Derivering och insättning ger $K = 1$ så den allmänna lösningen till den givna ekvationen ges av

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1.$$

   Man finner slutligen att villkoret $y(0) = 0, y'(0) = 0$ ger $C_1 = -1, C_2 = 0$ så lösningen är $y = 1 - \cos x$.

b) En integrerande faktor är $e^{\ln x} = x$. Efter multiplikation av den givna differentialekvationen med x erhålles ekvationen

$$\frac{d}{dx}(xy) = x.$$

Efter integration får vi $xy = \dfrac{x^2}{2} + C$, dvs

$$y = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}.$$

Villkoret $y(1) = 1$ ger lösningen

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}.$$

7. Funktionens nollställe är $x = \dfrac{1}{e}$.
$\lim_{x\to 0+} y = 0.$

$$y' = x(2\ln x + 3) \text{ samt } y'' = 2\ln x + 5.$$

$y'(e^{-3/2}) = 0$ så $x = e^{-3/2}$ är lokal minimipunkt, t ex enligt andra derivatans tecken. $y''(e^{-5/2}) = 0$ och det följer att $x = e^{-5/2}$ är en inflexionspunkt, t ex enligt andraderivatans teckenväxling.
Om vi definierar $f(0) = 0$, så att funktionen blir högerkontinuerlig i origo, finner vi att högerderivatan blir noll i origo, eftersom

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0,$$

så x-axeln är högertangent till kurvan i origo.