Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

Tentamen
ENVARIABELANALYS
2009-04-18

SVAR OCH ANVISNINGAR

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}x + \ldots) - (1 - \frac{1}{2}x + \ldots)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \ldots}{x} = \lim_{x\to 0}(1 + \ldots) = 1.$$

2. Eftersom funktionen $f(x)$ är kontinuerlig på $0 < x < \infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ och det finns en punkt x där $f(x) > 0$ så har funktionen ett största värde enligt en sats i Adams Calculus. Det största värdet finns i detta fall i en punkt x_0 där antingen $f'(x_0) = 0$, dvs i en kritisk punkt, eller där $f'(x_0)$ inte existerar , dvs i en singulär punkt. Några singulära punkter finns inte på intervallet.

$$f'(x) = 2\frac{(1 + x^2)^2 - x \cdot 2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} = 2\frac{1 + x^2 - 4x^2}{(1 + x^2)^3} = 2\frac{1 - 3x^2}{(1 + x^2)^3}.$$

Den enda kritiska punkten på intervallet är alltså $x_0 = 1/\sqrt{3}$ och det största värdet är

$$2\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{(1 + \frac{1}{3})^2}.$$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x}{(1 + x^2)^2}\, dx = -(1 + x^2)^{-1}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{1 + x^2}\Big|_0^\infty = 1.$

4. Eftersom intervallet är slutet har den kontinuerliga funktionen $f(x)$ ett största värde på intervallet. Detta återfinns antingen i en kritisk punkt x_0, dvs där $f'(x_0) = 0$, i en singulär punkt eller i en ändpunkt. Vi har inga singulära punkter. $f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + x(-\dfrac{1}{2})e^{-\frac{1}{2}x}$. Den enda kritiska punkten är därmed $x_0 = 2$. Eftersom denna ligger utanför intervallet $0 \le x \le 1$ måste funktionen anta sitt största värde i någon av ändpunkterna. Då $f(0) = 0$ och $f(1) > 0$ så är det största värdet $f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

5. Partiell integration ger

$$\int_0^1 xe^{-\frac{1}{2}x}\, dx = (-2)xe^{-\frac{1}{2}x}|_0^1 - \int_0^1 (-2)e^{-\frac{1}{2}x}\, dx =$$

$$= (-2)xe^{-\frac{1}{2}x}|_0^1 - 4e^{-\frac{1}{2}x}|_0^1 = 4 - \frac{6}{\sqrt{e}} > 0.$$

6. Definitionsområdet är $x \neq 0$. Funktionens nollställen är $x = \pm 1$.

   Vertikal asymptot är $x = 0$.

   $\lim_{x \to 0+} y = -\infty$. $\lim_{x \to 0-} +\infty$.

   $\lim_{x \to \pm\infty} (y(x) - x) = \mp 0$. Linjen $y = x$ är alltså sned asymptot.

   $y' = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ alla $x \neq 0$. Funktionen är växande och saknar lokala extrempunkter.

7. Den homogena ekvationen $y'' - y = 0$ har karakteristiska ekvationen $r^2 - 1 = 0$ med rötterna ± 1 så lösningarna till homogena ekvationen är $y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. För att bestämma en partikulärlösning y_P till den inhomogena ekvationen $y'' - y = 1$ ansättes $y_P = K$. Derivering och insättning ger $K = -1$ så den allmänna lösningen till den givna ekvationen ges av
   $$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1.$$
   Man finner slutligen att villkoret $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$ ger $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = -\frac{1}{2}$ så lösningen är $y = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x} - 1$.

8. En integrerande faktor är $e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$. Efter multiplikation av ekvationen med denna erhålles ekvationen $(\frac{1}{x} y)' = 1$ som ger $\frac{1}{x} y = x + C$ så allmänna lösningen är $y = x^2 + Cx$.

9. Serien är geometrisk med kvoten $r = -\frac{1}{2}$. Summan är därför $\frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$.

10. Då konvergensradien är lika med 2 divergerar serien för alla x för vilka $|x| > 2$ och konvergerar absolut för alla x för vilka $|x| < 2$. Då $x = 2$ har vi serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ som divergerar (harmoniska serien). För $x = -2$ har vi serien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ som konvergerar enligt satsen om alternerande serier. Denna konvergens är dock endast villkorlig.

1. a) Då $f(0) = 0$ och $f(x) < 0$ på ett intervall till höger och vänster om origo så är har funktionen ett lokalt maximum i origo.

b)
$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \ln |x| = 0.$$

c) Nollställena är $x = \pm 1$ samt $x = 0$. Derivatan
$$f'(x) = 2x \ln |x| + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln |x| + 1).$$

Derivatans nollställen är $\pm \frac{1}{\sqrt{e}}$. I dessa punkter har vi, utöver i origo, lokala extrempunkter, t ex enligt derivatans teckenväxling.

2. Kurvan har nollställena $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Derivatan $y' = 3x^2 - 3$ har nollställena ± 1. Lokala extrempunkter finns i $x = \pm 1$ där kurvan antar värdena ∓ 2. Den horisontella tangenten till kurvan i minimipunkten $(1, -2)$ går genom $(2, -2)$ och vi har därför funnit att en av de sökta tangenternas tangeringspunkt har x-koordinaten lika med 1.

Villkoret för att en linje genom $(2, -2)$ ska tangera kurvan $y = x^3 - 3x$ är att
$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x - 2} = 3x^2 - 3.$$

Vänster led är lutningen av linjen och höger led är lutningen av tangenten i punkten $(x, x^3 - 3x)$, dvs derivatan $y' = 3x^2 - 3$.

Vårt villkor kan förenklas till $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$. Vi har redan funnit att $x = 1$ måste vara en rot. Med faktorsatsen finner vi att de övriga rötterna är $1 \pm \sqrt{3}$.