

# Lösningar till tentamen i kursen Envariabelanalys

Måndagen den 24 maj, klockan 8:00-13:00

1. Bestäm gränsvärdena

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1 + 3x + x^2)} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{\ln(1 + 3x + x^2)}.$$

*Lösning.* **1.a)** Gränsvärdet är på formen  $0/0$  så vi kan använda l'Hospitals regel. Vi får

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1 + 3x + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{(3 + 2x)/(1 + 3x + x^2)} = \frac{\cos 0}{(3 + 2 \cdot 0)/(1 + 3 \cdot 0 + 0^2)} = \frac{1}{3}.$$

**Svar:**  $1/3$

**1.b)** Eftersom  $x \rightarrow \infty$  kan vi utan problem anta att  $x > 0$ . Eftersom  $-1 \leq \sin x \leq 1$  och  $\ln(1 + 3x + x^2) \geq \ln(x^2) = 2 \ln x$  gäller att

$$-\frac{1}{2 \ln x} \leq \frac{\sin x}{\ln(1 + 3x + x^2)} \leq \frac{1}{2 \ln x}.$$

Det betyder att eftersom  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \ln x} = 0$  så måste

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{\ln(1 + 3x + x^2)} = 0$$

enligt inklämningssatsen.

**Svar:**  $0$

2. Visa att  $\ln x (\ln x - 2010)^{2009}$  har anti-derivatan  $x (\ln x - 2010)^{2010}$ .  
(Ibland används ordet primitiv funktion istället för anti-derivata.)

*Lösning.* Vi ska visa att om  $f(x) = x (\ln x - 2010)^{2010}$  så är  $f'(x) = \ln x (\ln x - 2010)^{2009}$ .  
Låt oss beräkna derivatan:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 (\ln x - 2010)^{2010} + x \cdot 2010 (\ln x - 2010)^{2009} \frac{1}{x} \\ &= (\ln x - 2010 + 2010) (\ln x - 2010)^{2009} = \ln x (\ln x - 2010)^{2009}. \end{aligned}$$

Detta var precis det som skulle visas.

3. Hitta en funktion  $y(x)$  sådan att  $y(1) = 2$  och där

$$(x^3 + 2)^2 y'(x) - 3x^2 y^2 = 0.$$

*Lösning.* Ekvationen är separabel. Vi skriver  $y'(x)$  som  $\frac{dy}{dx}$  och separerar variablerna. Detta ger

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{3x^2}{(x^3 + 2)^2} dx$$

som kan förenklas till

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{3x^2}{(x^3+2)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^3+2 \\ du = 3x^2 dx \end{array} \right\} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{x^3+2} + C.$$

Alltså är

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{x^3+2} - C} = \frac{x^3+2}{1 - C(x^3+2)}.$$

Vi vet att  $y(1) = 2$  och nu är det dags att använda detta villkor. Vi får att

$$2 = y(1) = \frac{1^3+2}{1 - C(1^3+2)} = \frac{3}{1 - 3C}$$

så  $2 - 6C = 3$  varför  $C = -1/6$ . Alltså är

$$y(x) = \frac{x^3+2}{1 + (x^3+2)/6} = \frac{6x^3+12}{x^3+8}.$$

**Svar:**  $y(x) = \frac{6x^3+12}{x^3+8}$ .

4. Beräkna

$$\text{a)} \int x^5 \ln x \, dx \quad \text{b)} \int \frac{2-x+2x^2}{x+x^3} dx.$$

*Lösning.* **4.a)** Vi partialintegrerar (med  $f(x) = x^5$  och  $g(x) = \ln x$  enligt den notation jag brukar använda) och får

$$\int x^5 \ln x \, dx = \frac{x^6}{6} \ln x - \int \frac{x^6}{6} \frac{1}{x} dx = \frac{x^6}{6} \ln x - \int \frac{x^5}{6} dx = \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{x^6}{36} + C.$$

**Svar:**  $\int x^5 \ln x \, dx = \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{x^6}{36} + C$ .

**4.b)** Nämnaren kan skrivas som  $x(x^2+1)$  så vi gör en partialbråksuppdelning med ansatsen

$$\frac{2-x+2x^2}{x+x^3} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Vi sätter detta på gemensam nämnare och får

$$\frac{2-x+2x^2}{x+x^3} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)x}{x+x^3} = \frac{A+Cx + (A+B)x^2}{x+x^3}.$$

Detta gäller för alla  $x$  och vi sätter  $A, B, C$  så att  $A = 2$ ,  $C = -1$  och  $A+B = 2$ . Det sista villkoret ger  $B = 0$ . Med andra ord är

$$\frac{2-x+2x^2}{x+x^3} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2+1}.$$

Detta ger att

$$\int \frac{2-x+2x^2}{x+x^3} dx = \int \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = 2 \ln |x| - \arctan x + C.$$

**Svar:**  $\int \frac{2-x+2x^2}{x+x^3} dx = 2 \ln |x| - \arctan x + C$ .

5. Skissa kurvan  $y(x) = \ln(e^{2x} + 1) - x$ . Bestäm speciellt alla asymptoter och lokala extrempunkter.

*Lösning.* En del av räkningarna blir lättare om vi skriver om funktionen genom

$$y(x) = \ln(e^{2x} + 1) - x = \ln(e^{2x} + 1) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{e^{2x} + 1}{e^x}\right) = \ln(e^x + e^{-x})$$

och vi arbetar med detta uttryck, även om man lika gärna kan använda det uttryck som gavs i uppgiften. (Detta uttryck är bra för här syns tydligt att funktionen är jämn så att man kan hoppa över halva arbetet. Vi kommer dock låtsas att vi inte sett detta och arbeta på utan denna observation.)

Vi börjar med att söka asymptoter. Det finns ingen punkt där funktionen är obegränsad så den saknar vertikala asymptoter. Då  $x$  är stor är  $e^x$  stor och  $e^{-x}$  liten så  $y(x) \approx \ln(e^x) = x$ . Vi studerar därför  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) - x$ . Detta ger

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) - x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e^x + e^{-x}) - \ln(e^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + e^{-2x}) \\ &= \ln(1 + 0) = 0.\end{aligned}$$

Alltså är  $y = x$  en sned asymptot som kurvan närmar sig då  $x \rightarrow \infty$ . Då  $x$  är väldigt mycket mindre än noll är  $e^{-x}$  stor och  $e^x$  liten. Detta gör att  $y(x) \approx \ln(e^{-x}) = -x$  så vi ska studera  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) + x$ . Vi får att

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) + x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + e^{-x}) + \ln(e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^{2x}) \\ &= \ln(1 + 0) = 0.\end{aligned}$$

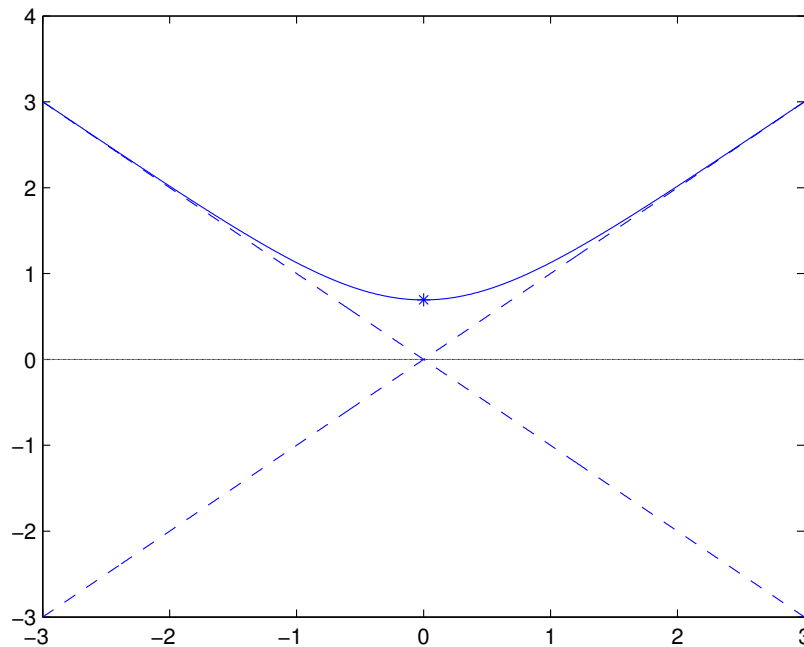
Med andra ord närmar sig kurvan  $y(x)$  den sneda asymptoten  $y = -x$  då  $x \rightarrow -\infty$ .

Vi söker nu lokala extrempunkter. Funktionen är deriverbar överallt och det finns inga ändpunkter så den enda möjligheten till extrempunkter är kritiska punkter, dvs punkter där  $y'(x) = 0$ . Vi får att

$$y'(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} (e^x - e^{-x})$$

så  $y'(x) = 0$  leder till  $e^x - e^{-x} = 0$ . Multiplicerar vi med  $e^x$  så får vi  $e^{2x} - 1 = 0$ , vilket har lösningen  $x = 0$ . För  $x = 0$  är  $y = y(0) = \ln(e^0 + e^0) = \ln 2$  som måste vara ett lokalt minimum om vi kommer ihåg vad vi räknat fram om asymptoterna.

**Svar:** Det finns två asymptoter,  $y = x$  och  $y = -x$  och ett lokalt minimum som inträffar i  $x = 0$ . Figuren, med dessa inritade, ser ut så här:



**6.a)** Har funktionen  $f(x) = \sin x + e^{-x}$  någon anti-derivata (primitiv funktion) på intervallet  $[0, \infty)$ ?

**6.b)** Är funktionen  $f(x) = \sin x + e^{-x}$  integrerbar på intervallet  $[0, \infty)$ ? Med andra ord; är den generaliserade integralen  $\int_0^\infty f(x) dx$  konvergent?

*Lösning.* **6.a)** En sådan är  $F(x) = -\cos x - e^{-x}$ , så svaret är ja.

**Svar:** Ja.

**6.b)** Frågan är om gränsvärdet  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(x) dx$  existerar. Enligt lösningen av 6a) är

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} [-\cos x - e^{-x}]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} -\cos t - e^{-t} - (-\cos 0 - e^{-0}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} -\cos t - e^{-t} + 2. \end{aligned}$$

Eftersom  $\cos t$  antar alla värden mellan  $-1$  och  $1$  även för stora  $t$  kan detta gränsvärde inte existera.

**Svar:** Nej.

**7.** Avgör om serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(e^n - 1)}$$

är absolutkonverget, betingat konvergent eller divergent?

*Lösning.* Vi börjar med att reda ut om serien är absolutkonvergent. Med andra ord studerar vi serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(e^n - 1)}$$

och försöker avgöra om denna serie är konvergent eller inte. Då  $n$  är stort är  $\ln(e^n - 1) \approx \ln(e^n) = n$  så vi vill jämföra serien  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(e^n - 1)}$  med  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Eftersom vi vet att  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  är divergent kan vi dra slutsatsen att även  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(e^n - 1)}$  är divergent om vi kan visa att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(e^x - 1)}$$

existerar och är ett nollskilt tal. Vi använder l'Hospitals regel eftersom gränsvärdet är på formen  $\infty/\infty$  och får

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{e^x}{e^x - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - e^{-x} = 1.$$

Alltså är

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(e^n - 1)}$$

varför serien inte är absolutkonvergent.

Låt oss nu se om serien är konvergent, om den är detta vet vi nu att serien är betingat konvergent. Eftersom  $\ln x$  och  $e^x - 1$  är växande funktioner måste  $1/\ln(e^x - 1)$  vara avtagande. Dessutom gäller

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(e^n - 1)} = 0$$

så enligt Leibniz konvergenssats gäller att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(e^n - 1)}$$

är konvergent.

**Svar:** Serien är betingat konvergent.

**8.** Då en cirkelskiva med radien 1 cm, och vars centrum är 3 cm från y-axeln, roteras kring y-axeln, bildas en kropp som ser ut som en munk. Bestäm volymen av "munken".

*Lösning.* Låt oss välja att placera  $y = 0$  i centrum av cirkelskivan. Av symmetrin framgår att volymen av hela munken är dubbelt så stor som volymen av den övre halvan (den som har  $y \geq 0$ ) av munken. Vi försöker nu beräkna denna del: Cirkelbågen ges av  $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ , dvs  $y = \pm\sqrt{1 - (x - 3)^2}$ . Den övre cirkelbågen, den vi är intresserade av, är den med plustecken så  $y = \sqrt{1 - (x - 3)^2}$  där  $2 \leq x \leq 4$ . Enligt formel ges volymen av

$$V = \int_2^4 2\pi xy(x) dx = 2\pi \int_2^4 x\sqrt{1 - (x - 3)^2} dx.$$

Vi byter variabel till  $u = x - 3$ , detta ger

$$V = 2\pi \int_{-1}^1 (u + 3)\sqrt{1 - u^2} du = 2\pi \int_{-1}^1 u\sqrt{1 - u^2} du + 6\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - u^2} du.$$

Båda dessa integraler kan beräknas med metoder vi lärt oss under kursens gång, men det går att göra två observationer som gör att man inte behöver göra några räkningar alls. För det första är integranden i den första integralen en udda funktion så den integralen måste vara 0. För det andra är  $\sqrt{1 - u^2}$  bågen till en halvcirkel med radie 1 så  $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - u^2} du$  är arean av en halvcirkel med radien 1, dvs den är  $\pi/2$ . Alltså är volymen av övre halvan av munken  $6\pi\pi/2 = 3\pi^2$  och därför har hela munken volymen  $6\pi^2$ .  
Svar:  $6\pi^2 \text{ cm}^3$