

Föreläsning 17

Approximationer

En funktion $f(x)$ kan nära $x = a$ uppskattas med tangenten till f i punkten a , dvs

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

Detta kallas för en linjär approximation av f i punkten a .

En (ofta) bättre approximation får man om man approximerar $f(x)$ med det polynom $P_n(x)$ av grad n som uppfyller att

$$f(a) = P_n(a), f'(a) = P'_n(a), \dots, f^{(n)}(a) = P_n^{(n)}(a).$$

Detta polynom kallas Taylorpolynomet av grad n och kan skrivas som

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Hur bra approximation av $f(x)$ är $P_n(x)$?

Allt beror på hur "snäll" funktionen f är, ju fler gånger man kan derivera f på ett intervall kring a desto bättre blir approximationen på intervallet. Vi har följande svar för riktigt "snälla" funktioner:

Om f är $n + 1$ gånger deriverbar mellan a och x så finns ett s mellan a och x sådant att felet $E_n(x)$ i approximationen, dvs $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$, kan skrivas som

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

En praktisk beteckning är följande:

Om det finns ett intervall I kring a och en konstant K sådan att $|f(x)| \leq Ku(x)$ för alla $x \in I$ skriver vi att $f(x) = O(u(x))$ då $x \rightarrow a$.

Vi skriver också $f(x) = g(x) + O(u(x))$ då $x \rightarrow a$ om $f(x) - g(x) = O(u(x))$ då $x \rightarrow a$.

Välkända och användbara Taylorutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + O(x^{n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$