

Föreläsning 19

Areor och intuitiv förklaring

Integralen $\int_a^b f(x) dx$ är arean mellan x -axeln och funktionen $f(x)$ avgränsad i x -led av linjerna $x = a$ och $x = b$.

Arean ska räknas med tecken så om $f(x)$ är under x -axeln ska "arean" vara negativ.

Approximationsidé

Arean, dvs integralen, kan uppskattas godtyckligt bra, som summan av areorna (räknat med tecken) av ett antal smala rektanglar.

Integralens historia

Integralen "uppfanns" av Newton och Leibniz på slutet av 1600-talet, de hade ingen definition utan tänkte på integralen enligt de intuitiva förklaringarna ovan.

Först i mitten av 1800-talet gav Riemann den första riktiga definitionen då han skapade den så kallade Riemann-integralen. Detta är också den integral som man lär ut till studenter eftersom den är "lätt" att definiera.

På 1900-talet skapades Lebesgue-integralen, vilken är den integral som matematiker oftast brukar använda.

Det finns numera många olika integrationsbegrepp och skillnaden mellan dem är inte värdet på integralen utan istället vilka funktioner man anser att man kan integrera.

Summasymbolen

Uttryck på formen

$$f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \dots + f(n)$$

förekommer ofta och tar mycket plats. Därför har man infört symbolen $\sum_{k=m}^n f(k)$ som betyder just detta. Med andra ord

$$\sum_{k=m}^n f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \dots + f(n).$$

Partitioner

Med en partition P av intervallet $[a, b]$ menar vi en uppdelning av $[a, b]$ i ett ändligt antal intervall.

Egenskap hos reella tal

Varje uppåt och nedåt begränsad mängd har en "bästa övre begränsning" och en "bästa nedre begränsning", dvs ett minsta tal C och ett största tal c så att

$$c \leq x \leq C$$

för alla $x \in X$. Den bästa övre begränsningen C kallas supremum av X , skrivet $\sup(X)$, och den bästa nedre begränsningen c kallas infimum av X , skrivet $\inf(X)$.

Över- och under-summor

Låt P vara en partition av $[a, b]$ bestående av intervallen $I_1, I_2, \dots, I_n$ som har längderna $l_1, l_2, \dots, l_n$. Vi skapar undersumman $U(P, f)$ genom

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n \inf (f(I_k)) l_k$$

och översumman $O(P, f)$ genom

$$O(P, f) = \sum_{k=1}^n \sup (f(I_k)) l_k.$$

Alla översummor ger ett för stort värde på integralen och alla undersummor ger ett för litet värde.

Om supremum av alla undersummorna sammanfaller med infimum över alla översummor sägs f vara Riemann-integrerbar. Integralens värde, dvs $\int_a^b f(x) dx$, är supremum av undersummorna, eller om man så vill, infimum av översummorna.

Sats

Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ så är f integrabel på $[a, b]$.