

Föreläsning 24

Speciella substitutioner

Integraler som innehåller $\sqrt{a^2 - x^2}$ förenklas ofta av substitutionen $\theta = \arcsin(x/a)$. Detta är den vinkel $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ som uppfyller $x = a \sin \theta$.

Integraler som innehåller $\sqrt{x^2 - a^2}$ förenklas ofta av substitutionen $x = a / \cos \theta$. (där vinkeln θ väljs med $0 \leq \theta \leq \pi$)

Integraler som innehåller $a^2 + x^2$ förenklas ofta av substitutionen $\theta = \arctan(x/a)$. Detta är den vinkel $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ som uppfyller $x = a \tan \theta$.

Integraler som innehåller funktioner av *sinus* och *cosinus* förenklas ofta av substitutionen $\theta = 2 \arctan x$. Detta är den vinkel $-\pi < \theta < \pi$ som uppfyller $x = \tan(\theta/2)$.

Generaliserad Riemann-integral

Riemann-integralen är definierad för begränsade funktioner på ett begränsat och slutet intervall.

Den generaliserade Riemann-integralen på intervallet $[a, b)$ definieras genom

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f(x) dx,$$

(om detta gränsvärde existerar och är ändligt) där integralerna i högerledet är vanliga Riemann-integraler. På detta sätt får man en definition av integraler av funktioner som är eventuellt obegränsade i ändpunkten b och också på integraler över obegränsade intervall.

Den generaliserade Riemann-integralen på intervallet $(a, b]$ definieras genom

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a+} \int_t^b f(x) dx,$$

(om detta gränsvärde existerar och är ändligt) där integralerna i högerledet är vanliga Riemann-integraler.

Jämförelsesats för generaliserade integraler

För det speciella fall att $f(x) \geq 0$ finns följande jämförelsesats:

Om $f(x) \leq g(x)$ och om $\int_a^b g(x) dx$ existerar, då existerar även $\int_a^b f(x) dx$.

Att en generaliserad integral existerar kallas också att den är konvergent, om den inte existerar sägs den vara divergent.