

Föreläsning 1

Kursinformation

All viktig information om kursen ska kunna läsas på kursens hemsida

<http://www.math.uu.se/~rikardo/envariabelanalys/huvudsidor/index.html>

Funktioner

En funktion f , från mängden X till mängden Y , är något som för varje element x i X ger ett värde $f(x)$ i Y .

X kallas för funktionens definitionsmängd, mängden av funktionens alla värden kallas funktionens värdemängd.

Skrivs inte definitionsmängd och värdemängd för ut antar vi i den här kursen att värdemängden är de reella talen och definitionsmängden är den största mängd av reella tal som gör att värdemängden är reell.

Udda och jämna funktioner

En funktion sådan att $f(-x) = f(x)$ för alla x kallas jämn.

En funktion sådan att $f(-x) = -f(x)$ för alla x kallas udda.

Binära Operationer

Vi definierar summan av två funktioner genom

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Vi definierar produkten av två funktioner genom

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x).$$

Vi definierar sammansättningen av två funktioner

$$\text{genom } f \circ g(x) = f(g(x)).$$

Föreläsning 2

Gränsvärden

Om vi kan få $f(x)$ att vara så nära L vi vill genom att välja $x \neq a$ tillräckligt nära a säger vi att $f(x)$ går mot L då x går mot a och skriver

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Om man bara väljer x till vänster om a (dvs $x < a$) kallar vi detta vänstergränsvärdet och skriver

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L.$$

Om man bara väljer x till höger om a (dvs $x > a$) kallar vi detta högergränsvärdet och skriver

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L.$$

Satser om gränsvärden

Att $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existerar och är lika med L är ekvivalent med att både vänster- och höger-gränsvärdet existerar och är lika med L .

Om $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ och $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existerar och är lika med L respektive M , då gäller: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = L + M$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = LM$ och så vidare. Dessutom gäller att om $f(x) \leq g(x)$ så är $L \leq M$.

Om $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ och $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, då existerar gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ och

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Föreläsning 3

Att gå mot oändligheten

Man talar inte bara om att gå mot reella tal a , man kan också tala om att något går mot oändligheten, eller mot minus oändligheten. Skillnaden är att vi närmar oss a , men att det inte går att närma sig oändligheten, vi växer bara obegränsat.

Gränsvärdesdefinitionen

Om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att, om $x \neq a$ uppfyller att $|x - a| < \delta$, så gäller att $|f(x) - L| < \epsilon$, säger vi att $f(x)$ går mot L , då x går mot a och skriver

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Att förstå gränsvärdesdefinitionen

Man kan tänka på δ och ϵ som väldigt små. Låt oss säga att gränsvärdet existerar. Definitionen betyder då att om någon säger att du ska få $f(x)$ att vara närmre L än ϵ , så kan du det (oavsett hur litet ϵ är) genom att välja $x \neq a$ tillräckligt nära (mindre än δ ifrån) a .

Föreläsning 4

Kontinuitet

Enkelt uttryckt är en funktion kontinuerlig i en punkt a om den inte hoppar där. Vidare sägs funktionen vara kontinuerlig om den inte hoppar alls, dvs om den inte hoppar i någon punkt. Om funktionen hoppar sägs den vara diskontinuerlig.

Matematiskt skrivs definitionen så här:

Vi säger att $f(x)$ är kontinuerlig i $x = a$ om gränsvärdet då x går mot a existerar och är lika med funktionsvärdet i $x = a$.

Eller mer kompakt:

Vi säger att $f(x)$ är kontinuerlig i $x = a$ om

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

En funktion sägs vara kontinuerlig om den är kontinuerlig i alla punkter a .

För de två nedanstående satserna låter vi I vara ett begränsat och slutet intervall, dvs ett intervall som kan skrivas som $I = [a, b]$.

Max-min-sats

Om funktionen f är kontinuerlig på I så antar f ett största och ett minsta värde på I .

Satsen om mellanliggande värde

Om funktionen f är kontinuerlig på I och om värdet y ligger mellan $f(a)$ och $f(b)$, då finns ett tal $x \in I$ sådant att $f(x) = y$.

Föreläsning 5

Derivator

Grafiskt sett är derivatan $f'(a)$ lutningen av kurvan av $f(x)$ i punkten $x = a$.

Matematiskt skrivs definitionen så här:

Vi definierar $f'(x)$ genom

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

för alla x där detta gränsvärde existerar och är ändligt. Om $f'(x)$ existerar säger vi att f är deriverbar i x .

Uppskattningar med hjälp av derivator

Om vi vill skatta förändringen $f(x+h) - f(x)$ på ett ungefär (där h är litet) kan man ofta göra detta med hjälp av

$$f(x+h) - f(x) \approx hf'(x).$$

Föreläsning 6

Deriveringsregler du bör kunna och förstå:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Funktioner du bör kunna derivera:

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

Föreläsning 7

Implicita funktioner

En funktion $y(x)$ som beskrivs genom

"det $y(x)$ som uppfyller ekvationen $F(x, y) = 0$ "

sägs beskrivas implicit. Ofta finns flera sådana y och då måste man säga vilket y man väljer. Ett vanligt sätt att göra detta är att säga att y ska vara nära ett visst tal, dvs t.ex. säga

"Bestäm y som en funktion av x nära punkten $(0, 0)$, då $x^2 + (y - 1)^2 = 1$."

Implicit derivering

Man kan derivera en implicit given funktion utan att lösa ut den, man deriverar bara hela ekvationen

$F(x, y) = 0$ m.a.p. x .

Detta kallas att derivera implicit.

Föreläsning 8

Max/min-sats

Om f är en funktion som antar sitt minimum eller maximum i en inre punkt c (dvs inte i någon ändpunkt till ett intervall) och om f är deriverbar i c , då är $f'(c) = 0$.

Definition: En punkt c där $f'(c) = 0$ kallas för en kritisk punkt.

Medelvärdes-satsen

Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) . Då finns en punkt $c \in (a, b)$ sådan att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tecknet på derivatan (om den finns) avgör om funktionen växer eller avtar.

Om $f'(x) > 0$ på intervallet I så är f strikt växande på I .

Om $f'(x) < 0$ på intervallet I så är f strikt avtagande på I .

Föreläsning 9

Injektiva funktioner

En funktion f som är sådan att olika x -värden ger olika funktionsvärden kallas injektiv.

Inversa funktioner

För injektiva funktioner f kan man bilda en inversfunktion f^{-1} genom att byta plats på begreppen in-stoppat värde och funktionsvärde. Med andra ord definierar vi f^{-1} värde i punkten $f(x)$ till att vara x , alltså

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Definitionsmängden för f och värdemängden för f^{-1} är alltid samma.

Definitionsmängden för f^{-1} och värdemängden för f är alltid samma.

Då man ska räkna ut inversen till $f(x)$ kallar man detta för y och skriver $y = f(x)$. Nu löser man ut x ur detta som en funktion av y . Denna funktion är $f^{-1}(y)$.

Föreläsning 10

Inversa trigonometriska funktioner

Funktionerna $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ är inte injektiva så de har inga verkliga inverser.

Däremot kan man välja att tänka på funktionerna som definierade bara på ett lämpligt intervall, där funktionerna är injektiva, och för dessa nya injektiva funktioner kan vi bilda inverser. Så här blir det:

Man ger den vinkel v som ligger i intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ och uppfyller $\sin v = x$ namnet $\sin^{-1} x$. Den kallas också $\arcsin x$.

Man ger den vinkel v som ligger i intervallet $[0, \pi]$ och uppfyller $\cos v = x$ namnet $\cos^{-1} x$. Den kallas också $\arccos x$.

Man ger den vinkel v som ligger i intervallet $(-\pi/2, \pi/2)$ och uppfyller $\tan v = x$ namnet $\tan^{-1} x$. Den kallas också $\arctan x$.

Derivator

Funktionerna deriveras enligt

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Föreläsning 11

En funktion på formen $f(x) = a^x$ kallas exponentialfunktion.

Då x är ett positivt heltal betyder a^x a multiplicerat med sig själv x gånger. Ur detta får man:

Potenslagarna

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$a^{xy} = (a^x)^y$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

Om man vill ha annat än heltalspotenser måste man kräva att $a > 0$, tex är inte $x^{1/2}$ definierat för $x < 0$.

Man kan utvidga definitionen av exponentialfunktionerna till att tillåta rationella potenser genom att definiera $a^{1/n}$ till att vara det positiva tal A sådant att $A^n = a$ och sen definiera $a^{m/n}$ genom $a^{m/n} = (a^m)^{1/n}$.

Genom kontinuitetsresonemang (och mycket jobb) kan detta ge en definition av a^x för $a > 0$ och alla x .

Lättare är det att istället definiera a^x för $a > 0$ genom

$$a^x = e^{(\ln(a)x)},$$

där $\ln x$ definieras för $x > 0$ genom

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

och e^x definieras som inversen till $\ln x$.

Inverser till exponentialfunktioner kallas logaritmer och logaritmlagarna är

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x)$$

Föreläsning 12

Funktionen $f(x) = e^x$ har derivatan $f'(x) = e^x$.

Funktionen $g(x) = a^x$ har derivatan $g'(x) = a^x \ln a$.

För stora x och $a > 1$ är a^x mycket, mycket större än x^b . Speciellt är

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{a^x} = 0.$$

För stora x och $b > 0$ är $\log_a(x)$ mycket, mycket mindre än x^b . Speciellt är

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a(x)}{x^b} = 0.$$

Föreläsning 13

Ofta är gränsvärden på formen $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, där f och g är deriverbara funktioner sådana att $f(a) = g(a) = 0$. Har man ett sådant gränsvärde kan man oftast (i praktisk mening) använda l'Hospitals regel.

l'Hospitals regel säger att

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

om gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar.

l'Hospitals regel kan också användas om gränsvärdet är på formen ∞/∞ .

Tänk på följande då du vill använda l'Hospitals regel:

1. Du måste kontrollera att gränsvärdet är på formen $0/0$ eller på formen ∞/∞ .
2. Du kan behöva använda regeln flera gånger för att få fram ett svar.
3. Kravet att $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar för att du ska få använda regeln är inget att oroa sig för. Skulle du få fram ett gränsvärde som inte existerar vet du att regeln inte fungerade (och att uppgiften måste lösas på ett annat sätt), men om du får fram ett svar så vet du att det är rätt.

Föreläsning 15

Max och min på slutna begränsade intervall

En kontinuerlig funktion definierad på ett slutet och begränsat intervall har ett maximum (dvs ett största värde) och ett minimum (dvs ett minsta värde).

Ett bra sätt att få fram maximum och minimum är att lista alla lokala maximum och minimum och sen se vilken punkt som ger högst värde, respektive lägst värde av dessa.

Max och min på andra intervall

Om intervallet istället är öppet eller obegränsat måste man försöka förstå beteendet "nära" randen för sig. I detta fall är det inte längre säkert att ett maximum och ett minimum finns.

Lokala extrempunkter

Om en punkt är ett lokalt maximum eller minimum är det antingen en singulär punkt, en kritisk punkt eller en ändpunkt.

En singulär punkt är en punkt där funktionen inte är deriverbar.

En kritisk punkt x är en punkt där $f'(x) = 0$.

Det finns singulära punkter som inte är lokala extrempunkter.

Det finns kritiska punkter som inte är lokala extrempunkter.

Det finns ändpunkter som inte är lokala extrempunkter.

Uppdaterad metod

Istället för att lista alla lokala maximum och minimum är det ofta mer praktiskt att lista alla singulära punkter, kritiska punkter och ändpunkter. Listan blir lite längre, men man slipper reda ut om punkterna verkligen är lokala extrempunkter eller ej.

Det är viktigt att se till att listan inte innehåller någon punkt som inte ligger på intervallet.

Föreläsning 16

Konvexa och konkava funktioner

En funktion som hela tiden böjer av uppåt på ett intervall I sägs vara konvex på I .

En funktion som hela tiden böjer av nedåt på ett intervall I sägs vara konkav på I .

För funktioner f som är två gånger deriverbara på I har vi följande karakterisering:

f är konvex på I om och endast om $f''(x) \geq 0$ för alla $x \in I$.

f är konkav på I om och endast om $f''(x) \leq 0$ för alla $x \in I$.

Om man vill veta om en kritisk punkt a är ett lokalt minimum eller ett lokalt maximum kan man räkna ut $f''(a)$. Om $f''(a) > 0$ är det ett minimum och om $f''(a) < 0$ är det ett maximum.

Asymptoter

En linje som grafen till en funktion närmar sig kallas en asymptot. Det finns vertikala, horisontella och sneda asymptoter.

Föreläsning 17

Approximationer

En funktion $f(x)$ kan nära $x = a$ uppskattas med tangenten till f i punkten a , dvs

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

Detta kallas för en linjär approximation av f i punkten a .

En (ofta) bättre approximation får man om man approximerar $f(x)$ med det polynom $P_n(x)$ av grad n som uppfyller att

$$f(a) = P_n(a), f'(a) = P'_n(a), \dots, f^{(n)}(a) = P_n^{(n)}(a).$$

Detta polynom kallas Taylorpolynomet av grad n och kan skrivas som

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Hur bra approximation av $f(x)$ är $P_n(x)$?

Allt beror på hur "snäll" funktionen f är, ju fler gånger man kan derivera f på ett intervall kring a desto bättre blir approximationen på intervallet. Vi har följande svar för riktigt "snälla" funktioner:

Om f är $n + 1$ gånger deriverbar mellan a och x så finns ett s mellan a och x sådant att felet $E_n(x)$ i approximationen, dvs $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$, kan skrivas som

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

En praktisk beteckning är följande:

Om det finns ett intervall I kring a och en konstant K sådan att $|f(x)| \leq Ku(x)$ för alla $x \in I$ skriver vi att $f(x) = O(u(x))$ då $x \rightarrow a$.

Vi skriver också $f(x) = g(x) + O(u(x))$ då $x \rightarrow a$ om $f(x) - g(x) = O(u(x))$ då $x \rightarrow a$.

Välkända och användbara Taylorutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + O(x^{n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

Föreläsning 19

Areor och intuitiv förklaring

Integralen $\int_a^b f(x) dx$ är arean mellan x -axeln och funktionen $f(x)$ avgränsad i x -led av linjerna $x = a$ och $x = b$.

Arean ska räknas med tecken så om $f(x)$ är under x -axeln ska "arean" vara negativ.

Approximationsidé

Arean, dvs integralen, kan uppskattas godtyckligt bra, som summan av areorna (räknat med tecken) av ett antal smala rektanglar.

Integralens historia

Integralen "uppfanns" av Newton och Leibniz på slutet av 1600-talet, de hade ingen definition utan tänkte på integralen enligt de intuitiva förklaringarna ovan.

Först i mitten av 1800-talet gav Riemann den första riktiga definitionen då han skapade den så kallade Riemann-integralen. Detta är också den integral som man lär ut till studenter eftersom den är "lätt" att definiera.

På 1900-talet skapades Lebesgue-integralen, vilken är den integral som matematiker oftast brukar använda.

Det finns numera många olika integrationsbegrepp och skillnaden mellan dem är inte värdet på integralen utan istället vilka funktioner man anser att man kan integrera.

Summasymbolen

Uttryck på formen

$$f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \dots + f(n)$$

förekommer ofta och tar mycket plats. Därför har man infört symbolen $\sum_{k=m}^n f(k)$ som betyder just detta. Med andra ord

$$\sum_{k=m}^n f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \dots + f(n).$$

Partitioner

Med en partition P av intervallet $[a, b]$ menar vi en uppdelning av $[a, b]$ i ett ändligt antal intervall.

Egenskap hos reella tal

Varje uppåt och nedåt begränsad mängd har en "bästa övre begränsning" och en "bästa nedre begränsning", dvs ett minsta tal C och ett största tal c så att

$$c \leq x \leq C$$

för alla $x \in X$. Den bästa övre begränsningen C kallas supremum av X , skrivet $\sup(X)$, och den bästa nedre begränsningen c kallas infimum av X , skrivet $\inf(X)$.

Över- och under-summor

Låt P vara en partition av $[a, b]$ bestående av intervallen $I_1, I_2, \dots, I_n$ som har längderna $l_1, l_2, \dots, l_n$. Vi skapar undersumman $U(P, f)$ genom

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n \inf (f(I_k)) l_k$$

och översumman $O(P, f)$ genom

$$O(P, f) = \sum_{k=1}^n \sup (f(I_k)) l_k.$$

Alla översummor ger ett för stort värde på integralen och alla undersummor ger ett för litet värde.

Om supremum av alla undersummorna sammanfaller med infimum över alla översummor sägs f vara Riemann-integrerbar. Integralens värde, dvs $\int_a^b f(x) dx$, är supremum av undersummorna, eller om man så vill, infimum av översummorna.

Sats

Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ så är f integrabel på $[a, b]$.

Föreläsning 20

Tre grundläggande regler för integraler är att

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \\ \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b C f(x) dx &= C \int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$

Om $f(x) \geq g(x)$ för $a \leq x \leq b$ så är

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx,$$

ur detta följer triangelolikheten som säger att

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Integralkalkylens fundamentalsats

Låt $f(x)$ vara en kontinuerlig funktion och definiera funktionen $F(x)$ genom $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

1. Då är $F(x)$ deriverbar och $F'(x) = f(x)$.
2. Om $G(x)$ är en funktion (vilken som helst) sådan att $G'(x) = f(x)$ för alla $a \leq x \leq b$, så kan man räkna ut $\int_a^b f(x) dx$ genom

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

Föreläsning 21

Substitutions-sats

Om f och g' är kontinuerliga så är

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

I praktisk användning letar man först upp ett uttryck $g(x)$ som man tycker krånglar till integralen, kallar detta uttryck för $u = g(x)$ och låter $du = g'(x) dx$.

Föreläsning 22 och Föreläsning 23

Partialintegrerings-sats

Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion med anti-derivatan $F(x)$ och $g(x)$ är en kontinuerligt deriverbar funktion så är

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx.$$

(Att F är anti-derivata till f betyder att $F'(x) = f(x)$.)

Partialbråksuppdelning

Man kan hitta anti-derivata till uttryck på formen $\frac{p(x)}{q(x)}$, där $p(x)$ och $q(x)$ är polynom.

* Dela först $p(x)$ med $q(x)$ så gott det går (tex med hjälp av liggande stolen),
dvs så att polynomet i täljaren har lägre grad än det i nämnaren.

* Faktorisera $q(x)$ och skriv varje faktor i nämnaren till ett bråk.

* Ansätt att täljaren till samma bråk är ett godtyckligt polynom av grad ett mindre än det i nämnaren.

* Lös ekvationssystemet.

* Hitta anti-derivata för varje ingående bråk.

Exempel på korrekta ansatser:

$$\frac{x}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{2x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Föreläsning 24

Speciella substitutioner

Integraler som innehåller $\sqrt{a^2 - x^2}$ förenklas ofta av substitutionen $\theta = \arcsin(x/a)$. Detta är den vinkel $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ som uppfyller $x = a \sin \theta$.

Integraler som innehåller $\sqrt{x^2 - a^2}$ förenklas ofta av substitutionen $x = a / \cos \theta$. (där vinkeln θ väljs med $0 \leq \theta \leq \pi$)

Integraler som innehåller $a^2 + x^2$ förenklas ofta av substitutionen $\theta = \arctan(x/a)$. Detta är den vinkel $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ som uppfyller $x = a \tan \theta$.

Integraler som innehåller funktioner av *sinus* och *cosinus* förenklas ofta av substitutionen $\theta = 2 \arctan x$. Detta är den vinkel $-\pi < \theta < \pi$ som uppfyller $x = \tan(\theta/2)$.

Generaliserad Riemann-integral

Riemann-integralen är definierad för begränsade funktioner på ett begränsat och slutet intervall.

Den generaliserade Riemann-integralen på intervallet $[a, b)$ definieras genom

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f(x) dx,$$

(om detta gränsvärde existerar och är ändligt) där integralerna i högerledet är vanliga Riemann-integraler. På detta sätt får man en definition av integraler av funktioner som är eventuellt obegränsade i ändpunkten b och också på integraler över obegränsade intervall.

Den generaliserade Riemann-integralen på intervallet $(a, b]$ definieras genom

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a+} \int_t^b f(x) dx,$$

(om detta gränsvärde existerar och är ändligt) där integralerna i högerledet är vanliga Riemann-integraler.

Jämförelsesats för generaliserade integraler

För det speciella fall att $f(x) \geq 0$ finns följande jämförelsesats:

Om $f(x) \leq g(x)$ och om $\int_a^b g(x) dx$ existerar, då existerar även $\int_a^b f(x) dx$.

Att en generaliserad integral existerar kallas också att den är konvergent, om den inte existerar sägs den vara divergent.

Föreläsning 25

Den kropp som bildas då kurvan $y = f(x)$ med $a \leq x \leq b$ roteras kring x-axeln har volymen

$$\int_a^b \pi(f(x))^2 dx.$$

Den kropp som bildas då kurvan $y = f(x)$ med $a \leq x \leq b$ roteras kring y-axeln har volymen

$$\int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

Kurvan $y = f(x)$ med $a \leq x \leq b$ har längden

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Den kropp som bildas då kurvan $y = f(x)$ med $a \leq x \leq b$ roteras kring x-axeln har (mantel-)arean

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} 2\pi f(x) dx.$$

Föreläsning 27

Parametriska kurvor

En kurva i planet kan parametreras genom $x = f(t)$ och $y = g(t)$, där t (parametern) löper över något intervall I .

I punkten $(f(t), g(t))$ är riktningen av kurvan $(f'(t), g'(t))$.

Följder

En följd är en oändlig uppsättning reella tal som följer på varandra. Det är alltså en funktion från de positiva heltalen till $\mathbb{R}$.

Viktig sats både för följder och annars

Om f är växande så existerar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Om f är begränsad är gränsvärdet ändligt, men om f är obegränsad är $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Föreläsning 28

Serier

En serie är en "oändlig" summa

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Detta kan skrivas mer kompakt som $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

För att definiera vad vi egentligen menar med en serie bildar vi

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

$\{s_n\}$ är en följd och vi tittar nu på gränsvärdet av denna följd. Om $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ säger vi att serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar och att dess summa är s , men om gränsvärdet är oändligt eller inte existerar säger vi att serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar.

Geometrisk seriens summa

Om $|r| < 1$ så konvergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ och dess summa är

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}.$$

Sats

Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent så gäller att

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0.$$

Föreläsning 29

Frågeställning och idé

Vi antar att $a_n \geq 0$ och hittar test som avgör om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent eller divergent. Om a_n är för stor är serien divergent, men om a_n är tillräckligt liten är serien konvergent. Hur stora de första elementen är spelar ingen roll, det viktiga är storleken på talen i "svansen".

Jämförelsetest med generaliserad integral

Om $f(x)$ är en avtagande positiv funktion så gäller att $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ är konvergent om och endast om $\int_1^{\infty} f(x) dx$ är konvergent.

Viktiga exempel

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ är konvergent om och endast om $\alpha > 1$.

Jämförelse med annan serie

Om $0 \leq a_n \leq K b_n$ för något tal $K > 0$ (som inte beror av n) så gäller att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar om $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar.

Ur detta följer att om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar så måste $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergera.

Gränsvärdestest

Om $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ där $L \neq 0$ är ett reellt tal så gäller att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar om och endast om $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar.

Kvottest

Om $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ gäller att:

- * Om $\rho < 1$ konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- * Om $\rho > 1$ divergerar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Rottest

Om $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ gäller att:

- * Om $\rho < 1$ konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- * Om $\rho > 1$ divergerar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Föreläsning 30

Absolutkonvergens

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sägs vara absolutkonvergent om serien $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ är konvergent.

En absolutkonvergent serie är konvergent.

Betingad konvergens

En serie som är konvergent, men inte är absolutkonvergent, sägs vara betingat konvergent.

Leibniz konvergenssats

Den enda satsen vi har till hands för att visa att en serie som inte är absolutkonvergent, faktiskt ändå är konvergent (dvs att serien är betingat konvergent) är Leibniz konvergenssats:

Om talföljden $\{a_n\}$ är avtagande och $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ så gäller att

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

är konvergent.

Man kan byta avtagande mot växande i satsen.

Föreläsning 31

Potensserie

En serie på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$$

kallas en potensserie kring punkten $x = c$.

För vilka x konvergerar potensserien?

Det finns tre olika möjligheter för för vilka x som potensserien konvergerar:

- * Serien konvergerar bara för $x = c$.
- * Serien konvergerar för alla x .
- * Det finns ett tal $R > 0$ sådant att serien konvergerar för $x \in (c - R, c + R)$ och divergerar för $x \in (-\infty, c - R)$ och $x \in (c + R, \infty)$.

R kallas för potensseriens konvergensradie. Den kan ofta beräknas genom $R = 1/\rho$ där

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Derivata och anti-derivata

Funktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

för $x \in (c - R, c + R)$ är deriverbar.

Dess derivata ges av

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n (x - c)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - c)^{n-1}.$$

En anti-derivata till $f(x)$ ges av

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - c)^{n+1}.$$

Båda potensserierna $f'(x)$ och $F(x)$ är alltså konvergenta för $x \in (c - R, c + R)$.

Föreläsning 32

Det flesta diffekvationer går inte att lösa. Vi lär oss hur man löser tre olika sorters diffekvationer i den här kursen:

- * Separabla diffekvationer
- * Första ordningens linjära diffekvationer
- * Linjära diffekvationer med konstanta koefficienter

Separabla diffekvationer

En separabel diffekvation är en diffekvation som kan skrivas som

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Man löser den genom att skriva detta som

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

och integrera båda led. M.a.o. genom att skriva

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx.$$

Föreläsning 33

Första ordningens linjära diffekvationer

Ekvationen $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ sägs vara linjär av första ordningen.

Så här löser man dem:

1. Dela ekvationen med $a(x)$. Vi inför nya beteckningar och kallar ekvationen

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x).$$

2. Hitta en anti-derivata $P(x)$ till det som är multiplicerat med $y(x)$, dvs till $p(x)$. Beräkna sedan integrerande faktorn $I(x) = e^{P(x)}$.

3. Multiplicera hela ekvationen med $I(x)$.

4 Skriv vänsterledet som $(I(x)y(x))'$. Ekvationen blir

$$(I(x)y(x))' = I(x)q(x).$$

5. Integrera och lös ut $y(x)$. Man får

$$y(x) = \frac{\int I(x)q(x) dx}{I(x)}.$$

Föreläsning 34

Ekvationen $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$ sägs vara en linjär diffekvation med konstanta koefficienter.

Om ekvationen är $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ sägs den vara homogen.

Så här löser man de homogena ekvationen

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 :$$

1. Ställ upp och karakteristiska ekvationen

$$ar^2 + br + c = 0.$$

2. Lös ekvationen och kalla lösningarna r_1 och r_2 .

3.1 Om $r_1 \neq r_2$ är reella tal är allmänna lösningen

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

3.2 Om $r_1 = r_2$ är allmänna lösningen

$$y(x) = (C_1 x + C_2) e^{r_1 x}.$$

3.3 Om $r_1 = \alpha + i\beta$ (och $r_2 = \alpha - i\beta$) är allmänna lösningen

$$y(x) = (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) e^{\alpha x}.$$

Så här löser man ekvationen

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x) :$$

1. Lös först den homogena ekvationen

$$ay_h''(x) + by_h'(x) + cy_h(x) = 0 \text{ enligt ovan.}$$

2. Hitta sen en lösning $y_p(x)$ till

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$$

genom att göra en befogad gissning och lösa det ekvationssystem som uppkommer.

3. Svaret är $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Hur ska man gissa?

Gissa att $y_p(x)$ är av "samma typ" som $f(x)$. Sätt godtyckliga konstanter framför varje term och lös ut deras värde.

Om en gissning inte fungerar kan det vara bra att multiplicera gissningen med x och försöka igen.