UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Ryszard Rubinsztein

ALGEBRA och GEOMETRI
för E1, F1, Q1

Höstterminen 2012

Tentamensförberedande uppgift 3

1. Visa att utvecklingen av uttrycket $\left(\frac{x^{1/5}}{3} - \frac{2}{x^{1/6}} - \frac{5}{x^{1/4}}\right)^{10}$ innehåller en term som är oberoende av x. Ange denna term. Svaret får innehålla uttryck av formen $\binom{n}{k}$.

2. Visa, utan att använda induktion, att $\binom{2n}{n} < 4^n$ för $n \geq 1$.

3. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

är entydigt lösbart och bestäm x_2 med hjälp av Cramers regel.

4. För vilka värden på den reella konstanten b är matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ b & 1 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

inverterbar? Bestäm B^{-1} för dessa värden på b **med hjälp av den till B adjungerade matrisen** $\operatorname{adj}(B)$. Jämför ert svar med svaret till problem 3 i Tentamensförberedande uppgift 1.

5. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} x & 2x & 4 & x \\ 1 & 2 & 2x & 1 \\ 2x & x-1 & 2 & 3x \\ 2 & x+1 & x+3 & x-1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

6. Lös ekvationen

$$\begin{vmatrix} 2 & x & x & 1 \\ 2x & 6x & 10 & 2 \\ x & 3x-4 & 2 & 1 \\ x & 3 & 1 & x \end{vmatrix} = 0\,.$$

7. Beräkna följande determinant D av ordning $n+1$:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

8.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

är en determinant av ordning n. Visa att det finns ett enkelt samband mellan D_n, D_{n-1} och D_{n-2} och använd detta för att beräkna D_n.

Facit:

1. $-\binom{10}{5}\binom{5}{2}\dfrac{2^3 5^2}{3^5}$

3. $x_2 = \dfrac{5}{2}$.

4. B är inverterbar $\Leftrightarrow$ $b \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Om $b \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$B^{-1} = \frac{1}{1-2b^2}\begin{pmatrix} 1-b^2 & -b & b^2 \\ -b & 1 & -b \\ b^2 & -b & 1-b^2 \end{pmatrix}$$

5. $x_{1,2} = \pm\sqrt{2},\ x_3 = 3,\ x_4 = -\frac{1}{4}$.

6. $x_1 = 2,\ x_{2,3} = -5 \pm \sqrt{20}$.

7. $D_{n+1} = (1-a)^n$.

8. Sambandet $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$. Determinanten $D_n = n+1$.