UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Ryszard Rubinsztein

Vårterminen 2014

Komplex analys 10hp

för

KandMa2

Kurslitteratur:

T.W.Gamelin, Complex Analysis, Springer, 2001.

Övningsuppgifter, en problemsamling i Komplex Analys utgiven av Matematiska Institutionen.

Anders Vretblad: Topologi och konvergens (1997 års upplaga, översedd 2008) (laddas ned från kursens hemsida).

Kurshemsida: http://www2.math.uu.se/˜ ryszard

Undervisning sker i form av föreläsningar (28 st) och lektioner (16 st).

Preliminär tidsplan för föreläsningarna

Föreläsning	Avsnitt	
1	I.1–6	Komplexa tal, komplexa exponentialfunktionen och komplexa logaritmer
2	I.7–8	Sinus och cosinus, komplexa potenser
3	II.1	Topologi i $\mathbb{C}$. Gränsvärden och kontinuitet
4-5		Kompakthet, likformig kontinuitet, sammanhang
6	II.2–5	Derivatan, analytiska funktioner, Cauchy-Riemanns ekvationer, harmoniska funtioner. Derivering av elementära funktioner
7	II.6–7	Konforma avbildningar, Riemannsfären, Möbiusavbildningar
8	II.7	Möbiusavbildningar (forts), konforma standardavbildningar
9	III.3	Dirichlets problem
10-11	IV.1–2	Integraler
12-13	IV.3, IV.7	Cauchys integralsats
14	IV.4	Cauchys integralformel
15	IV.5–6 III.4–5	Konsekvenser av Cauchys sats: Moreras och Liouvilles satser, maximumprincipen
16	V.1–2	Funktionsföljder och funktionsserier, likformig konvergens
17	V.3	Likformig konvergens av analytiska funktioner, potensserier
18	V.4, VI.1	Taylors formel, Laurentserier
19	V.7, VI.2	Nollställen och isolerade singulariteter
20	VII.1–2	Residysatsen och residykalkyl
21-22	VII.3–7	Integralberäkning med hjälp av residykalkyl
23	VIII.1–2	Argumentprincipen, Rouchés sats
24	VIII.3–5	Avbildningsegenskaper hos analytiska funktioner
25-26	IX.1–2 XI.1–2	Normala familier av analytiska funktioner, Riemanns avbildningssats
27	X.3	Schwarz's reflektionsprincip
28		Repetition

Preliminär plan för lektionerna

Under lektionerna behandlas främst problem ur problemsamlingen. Övningarna i nedanstående uppräkning är hämtade från denna såvida inte annat anges. En del uppgigfter i topologi är hämtade ur kompendiet **Anders Vretblad**: Topologi och konvergens (1997 års upplaga, översedd 2008) (kan laddas ned från kursens hemsida). Kompendiet betecknas nedan med **V**. Uppgifterna finns även samlade på sidan 4 av denna läsanvisning.

1. Komplexa tal, topologi, elementära funktioner
   A 2, 3, 4, 5. B 1 - 5, 7, 10, 11, 16, 17.
2. Gränsvärden, kontinuitet, hopningspunkter
   B 12. Övningarna 2.1(a), 2.2(d)(g), 2.5, 2.6(a)(b)(d), 3.1, 3.3, 3.4 i **V**.
3. Derivator, analytiska och harmoniska funktioner
   C 1, 6, 9, 10, 13, 14, 15.
4. Möbiusavbildningar
   D 3, 6, 7, 8, 9, 17, 21, 24.
5. Möbiusavbildningar (forts), konforma avbildningar
   D 10, 15, 19, 27, 31, 32.
6. Konforma avbildningar (forts), Dirichlets problem
   E 1, 2, 5, 7. (Obs: i uppgifterna E 1 och E 2 antas att funktionen u är **begränsad** i det givna området.)
7. Integration, Cauchys sats och integralformel
   F 4, 5, 6, 8, 9, 23, 25.
8. Konsekvenser av Cauchys integralformel
   F 10, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21.
9. Likformig konvergens
   H 2, 7, 8, 9. Övningarna 4.5 a,e, 4.11, 4.12, 4.13 i **V**.
10. Potensserier, Taylors formel, Laurentserier
    I 2a, 2c, 3, 5, 6, 8, 10, 11. L 1, 13, 17 (Obs: beräkningarna i L 17 görs enklast med hjälp av residykalkyl).
11. Nollställen, singulariteter
    K 1a, 1b, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11. L 3, 8, 18.

12-13. Residysatsen, residykalkyl
L 17, 19. M 2, 4, 6, 11b, 11c.

14-15. Integralberäkning
M 9a, 9c, 9d, 9e, 10b, 11g.

16. Argumentprincipen, Rouchés sats
    N 2b, 3b, 5, 6, 7, 12.

Inlämningsuppgifter

Under kursens gång kommer inlämningsuppgifter att delas ut. Lösningarna skall vara prydligt skrivna för hand. Om 40% resp. 70% av inlämningsuppgifterna är korrekt lösta får man 1 resp. 2 bonuspoäng. Dessa kommer att adderas till skrivningspoängen vid ordinarie tentamen.

Examination

Under kursens gång kommer en (frvillig) kontrollskrivning (dugga) att äga rum. På såväl denna som på sluttentamen kan man få maximum 40 poäng. Betygsalgoritmen ser ut som följer. Låt X vara resultatet på duggan, Y resultatet på sluttentan och sätt

$$Z = (2X + 3Y)/5 \ .$$

Låt S vara det största av talen Y och Z och låt T vara summan av S och bonuspoängen från inlämningsuppgifterna. För betyget 3, 4 och 5 krävs $T \geq 18$, $T \geq 25$ resp. $T \geq 32$.

Resultatet från duggan samt bonuspoängen från inlämningsuppgifterna tillgodoräknas enbart vid det första tentamenstillfället.

Mål

För godkänt betyg på kursen skall studenten

- kunna redogöra för begreppen analytisk funktion och harmonisk funktion samt för betydelsen av Cauchy-Riemanns ekvationer;
- kunna redogöra för begreppet konform avbildning och dess samband med analytiska funktioner samt känna till de elementära funktionernas avbildningsegenskaper;
- kunna redogöra för Möbiusavbildningar och deras avbildningsegenskaper samt kunna använda dem för konforma avbildningar;
- känna till definitionen av och kunna beräkna komplexa konturintegraler;
- känna till och kunna använda Cauchys integralsats och integralformler samt några av dessas konsekvenser;
- kunna analysera enkla funktionsföljder och funktionsserier med avseende på likformig konvergens, kunna redogöra för potensseriers konvergensegenskaper samt kunna utveckla analytiska funktioner i Taylor- eller Laurentserier i ett givet område;
- känna till grundläggande egenskaper hos analytiska funktioners singulariteter, kunna bestämma nollställens och polers ordning samt beräkna residuer och använda residuteknik för beräkning av integraler;
- kunna bestämma antalet rötter till enkla ekvationer i ett givet område;
- kunna formulera viktigare resultat och satser inom kursens område och kunna beskriva huvuddragen i viktigare satsers bevis;
- kunna använda kursens teori, metoder och tekniker för att lösa matematiska problem;
- kunna presentera matematiska resonemang för andra.

Uppsala, den 16 januari 2014.

Ryszard Rubinsztein

Selected problems in Topology from the compendium by Anders Vretblad: Topologi och konvergens (1997 års upplaga, översedd 2008) :

2.1 (a) Find all limit points of the sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, where $a_n = (-1)^n + \dfrac{n}{3n+1}$.

2.2 Find all limit points of the sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, where

(d) $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$ (g) $a_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{n^2+n}\right)$.

2.5 Show that the set of all limit points of a sequence is closed.

2.6 Determine $\limsup a_n$ and $\liminf a_n$, if $a_n =$

(a) $(-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$ (b) $\left(1 + \dfrac{\cos n\pi}{n}\right)^n$ (d) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{n^2+n}\right)$.

3.1 Find an example of a closed subset $A \subset \mathbb{R}$ and of a continuous function $f : A \to \mathbb{R}$ such that $f(A)$ is not closed.

3.3 Show that if $a > 0$ then the function $f(x) = \dfrac{1}{x}$ is uniformly continuous on $[a, \infty)$.

3.4 Show that $f(x) = \dfrac{1}{x}$ is **not** uniformly continuous on $(0, 1]$.

4.5 For which real x there exists $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, and in which intervals the convergence is uniform, if $f_n(x)$ is given by

(a) $f_n(x) = x^n$ (e) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n + e^x}$ (g) $f_n(x) = n^3 \sin^3 \dfrac{x}{n}$.

4.11 Show that if $\alpha > \frac{1}{2}$ then the series $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^{\alpha}(1 + kx^2)}$ converges uniformly on the whole $\mathbb{R}$.

4.12 Show that $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(\ln(1+x+n))^2}$ converges uniformly on the half-axis $[0, \infty)$.

4.13 Show that $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$ is continuous for $x \geq 0$. Calculate $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Answers:

2.1(a): $\{-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\}$.

2.2 (d) $\{-e, e\}$, (g) $\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

2.6 (a) $\limsup a_n = e$, $\liminf a_n = -e$, (b) $\limsup a_n = e$, $\liminf a_n = e^{-1}$, (d) $\limsup a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\liminf a_n = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4.5 (a) $f(x)$ exists for $-1 < x \leq 1$. $f(x) = 0$ for $-1 < x < 1$ and $f(1) = 1$, the convergence is uniform in every interval $[-a, a]$ with $0 < a < 1$, but **not** in $[-a, 1]$. (e) $f(x)$ exists for all $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ for all $x \in \mathbb{R}$, the convergence is uniform in any interval $(-\infty, a]$, $a < \infty$, but **not** in the whole $\mathbb{R}$. (g) $f(x)$ exists for all $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ for all $x \in \mathbb{R}$. The convergence is uniform on every bounded interval $[-a, a]$, but is **not** uniform on $\mathbb{R}$.

4.13 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.