

-
1. Skriv ett reguljärt uttryck för det språk över $\Sigma = \{j, u, n, i\}$ som består av alla strängar som
- a) innehåller minst en förekomst av delsträngen nu . (1p)
 - b) innehåller högst en förekomst av delsträngen nu . (2p)
 - b) innehåller exakt en förekomst av delsträngen nu . (2p)

LÖSNING

a) $\Sigma^* nu \Sigma^*$ där $\Sigma = j \cup u \cup n \cup i$

b) $r = (i \cup j \cup u \cup n^+ (i \cup j))^* (\varepsilon \cup n^+)$ beskriver strängar utan nu -förekomster.
Så $r \cup r(nu)r$ beskriver strängar med noll *eller* exakt en nu -förekomst, dvs högst en sådan förekomst.

c) $r(nu)r$

2. Betrakta den NFA med tre tillstånd $\{p, q, r\}$ som definieras sålunda:

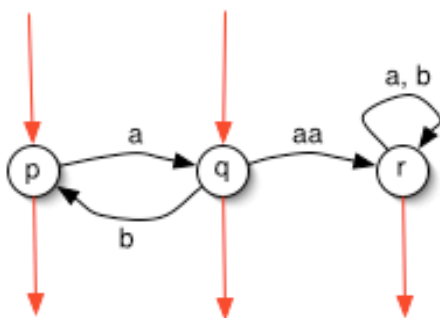
p och q är starttillstånd, alla tre tillstånden är accepterande och tillståndsövergångarna ges av $\{(p, a, q), (q, b, p), (q, a, r), (r, a, r), (r, b, r)\}$.

a) Konstruera med hjälp av delmängdskonstruktionen en DFA ekvivalent med NFA:n. (3p)

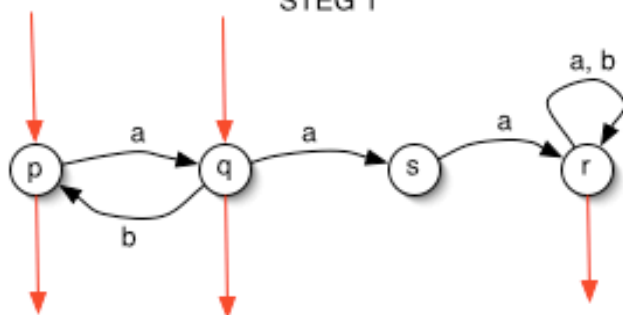
b) Är den resulterande DFA:n minimal? Motivera! (3p)

LÖSNING

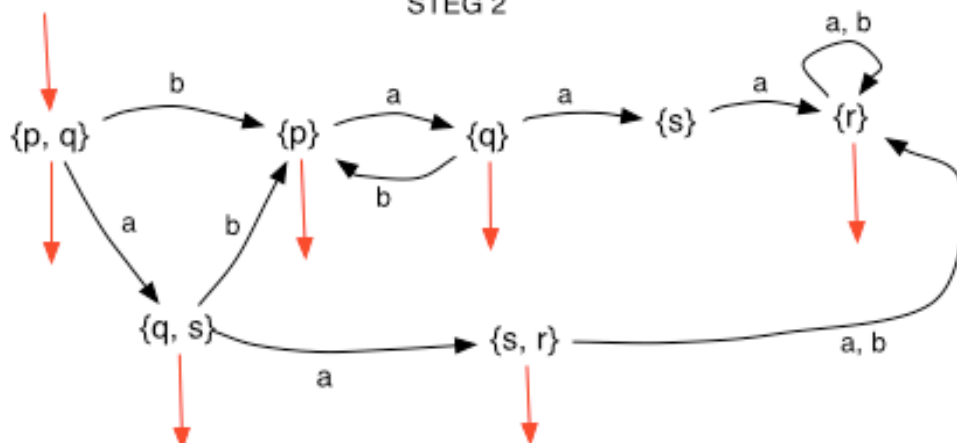
a)



STEG 1



STEG 2



b) NEJ. Tillstånden $\{r\}$ och $\{s, r\}$ kan slås ihop. (Dessa tillstånd kan ju inte särskiljas med någon enda sträng. Dvs, oavsett vilken sträng som läses från det ena eller andra tillståndet så drivs man till acceptans!)

med i språket, men $dvppvd$ och $dvdvp$ är det inte.

- a) Visa att varje icke-tom sträng i L (likt strängen $pvpvdvdvpdp$) innehåller någon permutation av dvp . (3p)
- b) Visa att L inte är sammanhangsfritt. (4p)

LÖSNING

a) Betrakta en icke-tom sträng w i språket. Då har w minst längden 3. Första och andra tecknet i w är olika, eftersom det inte får förekomma två lika tecken i rad. Vi kan anta att $w = d v \dots$

Betrakta nu den **första** förekomsten av p i w . (Det finns garanterat en förekomst av p i w , eftersom det finns lika många förekomster av alla tre tecknen.) Titta nu på de två tecknen omedelbart innan den första p -förekomsten. Dessa två tecken kan inte vara lika, eftersom de finns i rad. Ingen av dem kan heller vara lika med p , eftersom det motsäger att den första p -förekomsten ligger till höger därom. Alltså måste ett av de nämnda två tecknen vara d och det andra måste vara v . Eftersom dessa ligger omedelbart framför p har vi hittat en delsträng av önskat slag.

b) Bristen på sammanhangsfrihet följer om vi kan visa att $w = (d v)^K (p v)^K (p d)^K$ inte kan pumpas i något enda block av längd K (utan att strängen faller ur språket).

Vi visar först att följande delsträng av w **inte** går att pumpa inuti något enda K -block:

$$s = (d v)^K (p v)^K = d v d v \dots d v p v p v \dots p v$$

Om det gick att pumpa s inuti något K -block, så måste K -blocket ifråga innehålla minst ett p . (Annars skulle villkoret "lika många förekomster av samtliga tre tecken" gå förlorat vid pumpning.) Och eftersom första p -förekomsten kommer först efter $2K$ st tecken i s , följer att K -blocket **inte** skulle börja i den **vänstra änden** av s (eller hur!).

Den ymmiga förekomsten av v i s (vartannat tecken är v) medför att **varje pumpdel måste börja eller sluta på v** . Ty urpumpning av en pumpdel som varken börjar eller slutar på v leder till att man får två v i rad. Såvida inte pumpdelen börjar i den vänstra änden av s , men detta har vi ju kunnat utesluta.

Av den nämnda ymmiga v -förekomsten och av iakttagelsen om pumpdelarnas början och slut följer för varje pumpdel i s att **minst hälften av tecknen är v** . Detta leder emellertid till att villkoret "lika många förekomster av samtliga tre tecken" gå förlorat vid pumpning. Slutsats: det finns inget pumpbart K -block inuti delsträngen s .

Av symmetriskäl följer att inte heller delsträngen $(p v)^K (p d)^K$ innehåller något sådant K -block. Detta bevisar (enligt pumpsatsen för sammanhangsfria språk) att språket ifråga inte är sammanhangsfri.

6. Är följande problem avgörbara för godtycklig TM M ?

- a) Finns det någon inputsträng för vilken M någonsin stannar? (3p)
- b) Finns det någon inputsträng för vilken M stannar inom 13 steg? (3p)

LÖSNING

a) NEJ. Problemet kan formuleras: Är $L(M)$ icke-tom? Dvs problemet är ett språkproblem för Turingaccepterbara språk som handlar om egenskapen "att vara icke-tom". Denna egenskap är icke-trivial. Ty det finns sådana Turingmaskiner M för vilka $L(M)$ är icke-tomma, och sådana där $L(M)$ är tomma.

FORMELLT: Låt Ω vara mängden av icke-tomma Turingaccepterbara språk. Eftersom Ω är icke-trivial (se ovan) följer av RICE's sats att ingen TM kan avgöra för godtycklig TM M ifall $L(M) \in \Omega$.

b) JA. Under 13 steg hinner M inte undersöka längre strängar än sådana av längd högst 13. Det finns ändligt många sådana. Därför tar det ändlig tid att köra M på samtliga dessa strängar om man enbart kör M i 13 steg på var och en. Efter denna ändliga tid vet man svaret på frågan.