

UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Salling (070-6527523)

PROV I MATEMATIK
Fouriermetoder
19 okt 2005

SKRIVTID: 9-14, HJÄLPMEDEL: *Beta* (eller *Phys. HandBook*), formelsamling, miniräknare.

MOTIVERA ALLA LÖSNINGAR NOGGRANT.

POÄNGGRÄNSER: 3 18–24p, 4 25–31p, 5 32–40p. Varje uppgift är värd 8p.

1. Definiera *stabilitet* för en differentialekvation och avgör för vilka reella a som nedanstående differentialekvation är stabil.

$$y''(t) - (a + 1) y'(t) - (a + 2) y(t) = u(t)$$

LÖSNING

En differentialekvation sägs vara *stabil* om störningar av insignalen (högerledet) ger upphov till störningar av utsignalen (ekvationens lösning) som klingar av med tiden (går mot noll), oberoende av begynnelsedata.

En matematisk formalisering av ovanstående något vaga begrepp är att *impulssvaret h klingar av* (går mot noll) med tiden.

Enligt stabilitetssatsen råder stabilitet omm impulssvarets Laplacetransform, dvs *överföringsfunktionen*, har samtliga poler i vänstra halvplanet.

Impulssvaret ges av

$$h''(t) - (a + 1) h'(t) - (a + 2) h(t) = \delta(t) \text{ där } h(0) = h'(0) = 0.$$

Efter Laplacetransformering ...

$$H(s) s^2 - (a + 1) H(s) s - (a + 2) H(s) = 1$$

$$\text{och därmed } H(s) = \dots = \frac{1}{(s - a - 2)(s + 1)}.$$

Polerna till $H(s)$ är $s = a + 2$ och $s = -1$.

Så villkoret för stabilitet blir att $a + 2$ är negativ, dvs att $\boxed{a < -2}$.

2. (a) Bestäm Z-transformen av följden $(0, 0, 0, 1, 2, 3, \dots)$.
 (b) Bestäm inversa Laplacetransformen av $\frac{e^{-2s}}{(s+3)^2+9}$.

LÖSNING

(a) Från formelsamlingen: $(0, 1, 2, 3, \dots) \stackrel{\mathcal{Z}}{\sim} \frac{z}{(z-1)^2}$

Härav, (efter två högershiftningar),

$$(0, 0, 0, 1, 2, 3, \dots) \stackrel{\mathcal{Z}}{\sim} z^{-2} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{z(z-1)^2}$$

(b) Från formelsamlingen: $\frac{3}{s^2+9} \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\sim} \sin(3t)$

Det följer (efter dämpning och fördröjning) att

$$\begin{aligned} \frac{3}{(s+3)^2+9} &\stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\sim} e^{-3t} \sin(3t) \\ \frac{3e^{-2s}}{(s+3)^2+9} &\stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\sim} e^{-3(t-2)} \sin(3(t-2)) \theta(t-2) \end{aligned}$$

Härav,

$$\frac{e^{-2s}}{(s+3)^2+9} \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\sim} \frac{1}{3} e^{-3(t-2)} \sin(3(t-2)) \theta(t-2)$$

3. (a) Visa att en jämn funktions Fourierserie måste vara en cosinusserie och bestäm den 2π -periodiska Fourierserien till den funktion som är lika med $\pi - |t|$ på intervallet $-\pi < t \leq \pi$.

(b) Beräkna med hjälp av Fourierserien i (a) $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$

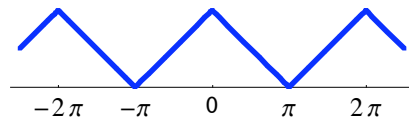
LÖSNING

(a) Om f är jämn så är $f(t) \sin(n\Omega t)$ udda (eftersom $\sin(n\Omega t)$ är udda), och då är sinuskoeficienterna noll:

$$b_n = \frac{2}{|T|} \int_{-\frac{|T|}{2}}^{\frac{|T|}{2}} f(t) \sin(n \Omega t) dt \quad \begin{array}{l} \text{udda integrand} \\ \text{symmetriskt intervall runt origo} \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ = \end{array} \quad 0$$

Därmed blir Fourierserien lika med $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \Omega t)$

(b) Vår funktion är jämn.

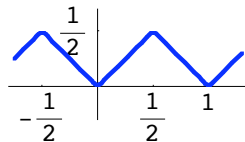


Därmed blir Fourierserien av typ $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n t)$.

Genom omskalning av den i formelsamligen givna cosinusserien

$$\frac{1}{4} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos(n 2 \pi t)$$

och funktionen

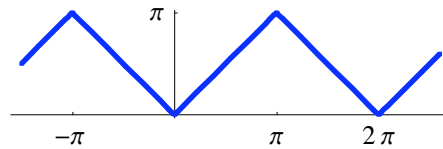


får vi cosinusserien

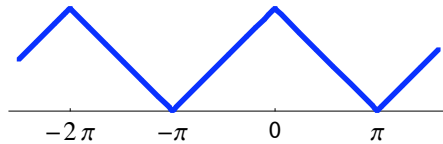
$$2 \pi \left(\frac{1}{4} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos\left(n 2 \pi \frac{t}{2 \pi}\right) \right) =$$

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi} \cos(n t) = \frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi} \cos(n t)$$

och funktionen



Genom translation π enheter av den senare får vi vår funktion!



$$\frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi} \cos(n(t + \pi)) =$$

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi} \cos(nt + n\pi) = \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi} \cos(nt)$$

Den senaste likheten följer av att $\cos(nt + n\pi) = -\cos(nt)$.

(b) För att beräkna den numeriska serien $S = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$

med hjälp av Fourierserien från (a) behöver vi bara evaluera Fourierserien i $t = 0$. Med Dirichlets sats får vi nämligen

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} S$$

Det följer att

$$S = \frac{f(0) - \frac{\pi}{2}}{\frac{4}{\pi}} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{\frac{4}{\pi}} = \frac{\pi^2}{8}$$

4. Beräkna Fouriertransformen av $\frac{t}{1+t^2}$ med hjälp av transformregler och använd din transform för att visa att $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1+t^2} \sin(t) dt = \frac{\pi}{e}$

LÖSNING

Från formelsamlingen:

$$e^{-|t|} \operatorname{sgn}(t) \sim -\frac{2i w}{1+w^2}$$

Med symmetriregeln får man

$$-\frac{2i t}{1+t^2} \sim 2\pi e^{-|w|} \operatorname{sgn}(-w)$$

Härav, (med linearitet)

$$f(t) = \frac{t}{1+t^2} \sim \pi i e^{-|w|} \operatorname{sgn}(-w) = F(w)$$

Å andra sidan är

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1+t^2} e^{-i w t} dt$$

Nu till integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1+t^2} \sin(t) dt$$

som är lika med

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1+t^2} \frac{e^{i t} - e^{-i t}}{2i} dt \\ &= \frac{1}{2i} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1+t^2} e^{i t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{1+t^2} e^{-i t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2i} (F(-1) - F(1)) \\ &= \frac{1}{2i} (\pi i e^{-1} \operatorname{sgn}(1) - \pi i e^{-1} \operatorname{sgn}(-1)) = \frac{1}{2i} 2\pi i e^{-1} = \frac{\pi}{e} \end{aligned}$$

5. Lös vågekvationen $u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t)$ för en horisontellt fastspänd sträng av längd 1 som har bägge ändar fixerade: $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$, och som vid tiden noll har horisontell form $u(x, 0) = 0$ samt som sätts i rörelse genom att man på ett avstånd a från ena änden ger strängen en impulsiv fart: $u_t(x, 0) = \delta(x - a)$.

LEDNING $\int_0^1 \delta(x - a) f(x) dx = f(a)$ om $0 < a < 1$.

LÖSNING

$$\text{PDE} = \left\{ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right\}$$

$$\text{RAND} = \{ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0 \}$$

$$\text{BEG} = \{ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = \delta(x - a) \}$$

Av **RAND** leds vi till att skriva u som en sinusserie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(n \pi x)$$

Av PDE följer $\frac{\partial^2 b_n(t)}{\partial t^2} = -n^2 \pi^2 b_n(t)$ vilket ger

$$b_n(t) = A_n \cos(n \pi t) + B_n \sin(n \pi t)$$

och (därmed) $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n \pi t) + B_n \sin(n \pi t)) \sin(n \pi x)$.

BEG ger $0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n \pi x)$ och $\delta(x - a) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n n \pi \sin(n \pi x)$

Därav följer att alla A_n är noll och att $B_n n \pi$ är lika med sinuskoeficienterna för $u(x, 0) = \delta(x - a)$. Dvs

$$B_n n \pi = 2 \int_0^1 \delta(x - a) \sin(n \pi x) dx = 2 \sin(n \pi a)$$

Så $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(n \pi a)}{n \pi} \cos(n \pi t) \sin(n \pi x)$.