

SKRIVTID: 9-14, HJÄLPMEDEL: *Beta* (eller *Phys. HandBook*), formelsamling, miniräknare. **MOTIVERA** ALLA LÖSNINGAR NOGGRANT.
POÄNGGRÄNSER: 3 18–24p, 4 25–31p, 5 32–40p. Varje uppgift är värd 8p.

1. Antag att funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ satisfierar

$$\begin{cases} x''(t) + 2 y(t) = \delta(t) \\ 2 x''(t) - 2 y''(t) + x(t) = \delta(t) \end{cases}$$

där $x(t) = y(t) = 0$ för $t < 0$, och $\delta(t)$ betecknar Diracfunktionen. Bestäm $x(t)$ och $y(t)$ med hjälp av Laplacetransformen.

LÖSNING

Vi Laplacetransformerar och får

$$X(s) s^2 + 2 Y(s) = 1$$

$$2 X(s) s^2 - 2 Y(s) s^2 + X(s) = 1$$

vars lösning är

$$X(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad Y(s) = \frac{1}{2(s^2+1)}$$

Inverstransformering ger till sist

$$\mathcal{L}_s^{-1}[X(s)](t) = \sin(t) \quad \mathcal{L}_s^{-1}[Y(s)](t) = \frac{\sin(t)}{2}$$

2. (a) Bestäm fourierserien till den π -periodiska funktionen

$$f(t) = |\sin(t)|$$

(b) Använd resultatet i (a) för att bestämma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \text{ och } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

LÖSNING

(a) Jämn funktion med period π . Således blir fourierserien en cosinusserie $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n t)$. Dess koefficienter är

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin(t)| \cos(2n t) dt = \dots = -\frac{4}{(4n^2-1)\pi}$$

Så fourierseriem blir lika med

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{(4n^2-1)\pi} \cos(2n t)$$

(b) Av Dirichlets sats följer att serien konvergerar mot funktionens värden i varje punkt, bl.a. i origo. Härav fås

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{(4n^2-1)\pi} + \frac{2}{\pi}$$

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

$$\text{Så, } \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

Den andra summan kan beräknas med hjälp av Parsevals

formel: $\frac{1}{|T|} \int_T |f(t)|^2 dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

som tillämpad på vårt f ger

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(t) dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{(4n^2-1)\pi}\right)^2$$

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{(4n^2-1)\pi}\right)^2$$

$$\text{dvs, } -\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{16} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n^2-1}\right)^2$$

3. Bestäm med hjälp av fouriertransformen en lösning y till $y(t) - \int_0^\infty y(t-\tau) e^{-2\tau} d\tau = \delta(t)$.

LÖSNING

Faltningsformeln

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) g(t-\alpha) d\alpha$$

kommer väl till pass. Men först måste vi ordna så att integrationsgränserna blir de "rätta" ...

$$y(t) - \int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau) e^{-2\tau} \theta(\tau) d\tau = \delta(t)$$

Efter fouriertransformering får vi

$$Y(w) - Y(w) G(w) = 1 \quad (1)$$

där G är fouriertransformen av $g(t) = e^{-2t} \theta(t)$

Den transformerade ekvationen (1) blir således lika med

$$Y(w) - Y(w) \frac{1}{2} \frac{1}{1+i\frac{w}{2}} = 1$$

Vi löser den ...

$$Y = \frac{1}{1-\frac{1}{2+iw}} = \frac{2+iw}{1+iw} = 1 + \frac{1}{i w+1} = 1 + \frac{1}{i w+1}$$

Efter inverstransformering erhålls $y = \delta(t) + e^{-t} \theta(t)$

4. Lös med hjälp av z -transformen differensekvationen

$$y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 1, \quad n \geq 0$$

där $y(0) = 2, y(1) = 3$.

LÖSNING

Först beräknar några inledande värden. Kan vara bra att ha för att kontrollera vår lösning så småningom ...

n	0	1	2	3	4	5
$y(n)$	2	3	4	3	-8	-57

z -transformering resulterar i

$$Y(z) z^2 - 2z^2 - 3z + 6Y(z) - 5(zY(z) - 2z) = \frac{z}{z-1}$$

vars lösning är

$$Y(z) = \frac{2z^3 - 9z^2 + 8z}{(z-1)(z^2-5z+6)}$$

Partialbråksuppdelar vi högerledet på ett smart sätt får vi

$$-\frac{z}{2(z-3)} + \frac{2z}{z-2} + \frac{z}{2(z-1)}$$

Inverstransformering ger

$$\frac{1}{2} + 2^{n+1} - \frac{3^n}{2}$$

Vi kontrollerar till sist vår lösning mot de inledningsvis beräknade värdena:

n	0	1	2	3	4	5
$y(n)$	2	3	4	3	-8	-5
$\frac{1}{2} + 2^{n+1} - \frac{3^n}{2}$	2	3	4	3	-8	-5

5. En stav av längden π cm har isolerad mantelyta och saknar inre värmekällor. Stavens ena ändpunkt hålles vid temperaturen 50 grader och den andra vid 100 grader. Från och med den tidpunkt då stationärt tillstånd inträffat isoleras de bägge ändpunkterna.

(a) Ange en differentialekvation samt rand- och begynnelsevillkor som beskriver temperaturen $u(x, t)$ i staven efter den nämnda tidpunkten.

(b) Lös differentialekvationen med de rand- och begynnelsevillkor som du angivit i (a)

(c) Beräkna $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$